

Приложение к журналу

# КВАНТ

№1/98

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ КРУЖОК

ГЕОМЕТРИЯ

*Выпуск 1*

Бюро



Квантум

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ КРУЖОК

ГЕОМЕТРИЯ

*Выпуск 1*

*Под редакцией  
А.А.Егорова*



---

Москва 1998  
Бюро «Квантум»

УДК 087.5.514  
ББК 22.151

Приложение  
к журналу «Квант»  
№1, 98

**Математический кружок: Геометрия. Выпуск 1/Под ред. А.А.Егорова. — М.: Бюро Квантум, 1998. — 128 с. (Прил. к журналу «Квант» №1/98)**

ISBN 5-85843-009-0

Книга представляет собой сборник статей по геометрии, опубликованных в разные годы в журнале «Квант» под рубрикой «Математический кружок». Темы статей выходят за рамки школьной программы, но доступны ученикам старших классов.

Для учащихся и преподавателей средних школ, лицеев и гимназий, для руководителей и участников математических кружков, а также для всех, кто интересуется математикой.

ББК 22.151

ISBN 5-85843-009-0

© Бюро Квантум  
«Квант», 1998

# СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие	4
Ошибки в геометрических доказательствах. <i>С.Табачников</i>	5
Вспомогательная окружность. <i>Э.Готман</i>	11
Теорема Морлея. <i>Г.Тоноян, И.Яглом</i>	16
Прямая Эйлера. <i>Э.Готман</i>	23
Окружность девяти точек и прямая Эйлера. <i>И.Шарыгин, А.Ягубьянц</i>	31
Точки Брокара. <i>В.Прасолов</i>	37
Вокруг теоремы Фейербаха. <i>В.Протасов</i>	41
Вокруг биссектрисы. <i>И.Шарыгин</i>	53
Об одной трудной геометрической задаче. <i>Е.Куланин</i>	61
О задаче Мальфатти. <i>В.Беленький, А.Заславский</i>	69
Одной линейкой. <i>Ю.Михеев</i>	79
Построения одним циркулем. <i>Д.Фукс</i>	85
Векторное решение аффинных задач. <i>А.Лопшиц</i>	90
Семейство параллельных $n$ -угольников. <i>Н.Васильев</i>	99
Сложение фигур. <i>Н.Васильев</i>	111
Ответы	123

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Перед вами сборник статей по геометрии, опубликованных в журнале «Квант» под рубрикой «Математический кружок». В него вошли статьи о таких классических объектах, как замечательные точки, прямые и окружности, связанные с треугольником; о задачах на построение, о различных методах решения геометрических задач, о линейных комбинациях геометрических фигур и т.д. Авторы «Кванта» — известные математики и педагоги — старались сделать изложение максимально простым, наглядным и автономным, т.е. таким, чтобы читатель получал максимально полную информацию из самой статьи, не обращаясь к другой литературе. Практически любая статья из сборника — это законченное эссе, посвященное объявленной в заглавии теме.

Номера «Кванта» за 1970 — 1980-е годы давно стали библиографической редкостью, так что наш сборник — это попытка дать вторую жизнь статьям, представляющим несомненный интерес, но практически недоступным нынешним читателям.

Наверное, всем школьникам встречались «доказательства» того, что  $1 = -1$ . Вот пример такого доказательства. Пусть  $a + b = c$  и  $a - b = 1$ . Умножим обе части равенства  $a + b = c$  на  $a + b$ . Мы получим:  $a^2 + 2ab + b^2 = c(a + b)$ . После преобразований получим:  $a^2 + ab - ac = -ab - b^2 + bc$  или  $a(a + b - c) = -b(a + b - c)$ . Деля обе части на  $a + b - c$ , получаем абсурдное равенство  $a = -b$  или  $1 = -1$ .

После мгновенного замешательства мы сразу находим ошибку в этом рассуждении: делить на  $a + b - c$  нельзя, так как это выражение равно нулю. Многие другие подобные доказательства используют ту же идею «замаскированного» деления на нуль, поэтому найти ошибку в них не составляет труда.

Менее известны ошибочные доказательства заведомо неверных утверждений в геометрии. Поиски ошибки в таких геометрических доказательствах составляют порой совсем непростую и очень поучительную задачу. Таким задачам посвящена замечательная книга Я.С. Дубнова *Ошибки в геометрических доказательствах* (М.: Наука, 1969)<sup>1</sup>. Эта книга, которая, к сожалению, уже давно не переиздавалась, содержит 15 геометрических «доказательств» вместе с полным разбором. Мы приведем сейчас одно из них. Следите внимательно за ходом рассуждений и постарайтесь найти ошибку.

**«Теорема».** *Все треугольники равнобедренные.*

**Доказательство.** Рассмотрим треугольник  $ABC$  (рис.1). Проведем биссектрису угла  $B$  и срединный перпендикуляр к основанию  $AC$ . (Далее мы будем называть их просто «биссектрисой» и «срединным перпендикуляром».) Обозначим через  $N$  их

---

<sup>1</sup> Яков Семенович Дубнов (1887 — 1957) — известный геометр и педагог, доктор физико-математических наук, профессор, долгие годы преподававший в Московском государственном университете. Я.С. Дубнов читал лекции для школьников в математическом лектории при МГУ. Эти лекции и легли в основу упомянутой книги.

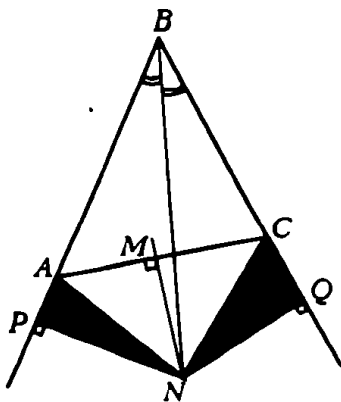


Рис. 1

точку пересечения. Опустим перпендикуляры  $NP$  и  $NQ$  на прямые  $AB$  и  $BC$ .

Поскольку точка  $N$  принадлежит биссектрисе, она равноудалена от прямых  $AB$  и  $BC$ . Следовательно,  $PN = QN$ . Поскольку точка  $N$  принадлежит срединному перпендикуляру, она равноудалена от точек  $A$  и  $C$ . Следовательно,  $AN = CN$ . Прямоугольные треугольники  $ANP$  и  $CNQ$  равны по катету и гипотенузе, следовательно,  $\angle NAP = \angle NCQ$ .

Кроме того, треугольник  $ANC$  равнобедренный, следовательно,  $\angle NAM = \angle NCM$ . Складывая равные углы, мы заключаем, что  $\angle PAM = \angle QCM$ . Значит, и  $\angle BAM = \angle BCM$ , поэтому треугольник  $ABC$  равнобедренный.

Доказательство закончено. Но у вас, наверно, возникли возражения. Попытаюсь угадать некоторые из них и на них ответить.

**Возражение 1.** Почему мы считаем, что биссектриса и срединный перпендикуляр пересекаются? Ведь они могут быть параллельными.

**Ответ.** Если биссектриса параллельна срединному перпендикуляру, то она перпендикулярна основанию треугольника. Следовательно, она является также и высотой  $\triangle ABC$ . Поэтому данный треугольник равнобедренный. Как видите, в этом случае вывод о том, что треугольник равнобедренный, сохраняет силу!

**Возражение 2.** Но биссектриса может и совпадать со срединным перпендикуляром.

**Ответ.** На это возражение у меня есть сразу два ответа. Во-первых, в этом случае биссектриса тоже совпадает с высотой и треугольник опять оказывается равнобедренным. Во-вторых, если биссектриса совпадает со срединным перпендикуляром, то точку  $N$  можно выбрать произвольно на биссектрисе и провести все рассуждения доказательства.

**Возражение 3.** А что, если биссектриса пересекает срединный перпендикуляр на основании  $AC$ , т.е.  $N = M$ ?

**Ответ.** В этом случае биссектриса совпадает с медианой  $BM$ . Отсюда легко следует, что треугольник  $ABC$  опять оказывается равнобедренным.

**Возражение 4.** Вы не рассмотрели случай, когда биссектриса пересекается со срединным перпендикуляром внутри треугольника  $ABC$ .

**Ответ.** Этот случай изображен на рисунке 2. Рассуждая аналогично тому, как мы делали при рассмотрении рисунка 1, мы заключаем, что  $AN = NC$ ,  $NP = NQ$  и, следовательно,  $\triangle APN = \triangle CQN$ . Поэтому  $\angle NAP = \angle NCQ$ . Кроме того,  $\triangle ANC$  равнобедренный, поэтому  $\angle NAM = \angle NCM$ . Складывая равные углы, мы получаем, что  $\angle BAC = \angle BCA$ . Следовательно, треугольник  $ABC$  — равнобедренный.

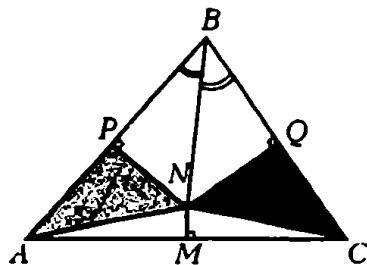


Рис.2

Впрочем, могут представить и другой контрдовод: случай, изображенный на рисунке 2, невозможен, так как биссектриса треугольника всегда лежит между его медианой и высотой.

Итак, четыре возражения мне удалось парировать. Предлагаю читателю на этом месте остановиться и все-таки найти решающее возражение против приведенного «доказательства». А если не получится — посмотреть в ответ.

\*\*\*

Ну вот, теперь вы будете относиться к чертежам с большим подозрением. Возможно, некоторым читателям захотелось даже пойти дальше: сделать все математические доказательства совершенно формально-логическими, не обращаться к наглядным представлениям, исключая тем самым возможность ошибки. Математики-профессионалы обычно удовлетворяются тем, чтобы их доказательства *могли бы быть* записаны формально. Однако, как правило, они широко используют всевозможные наглядные представления, в том числе рисунки. Объясняется это тем, что формальные выводы значительно длиннее обычных доказательств, воспринимать и придумывать их гораздо труднее<sup>2</sup>. Так что отказываться от чертежей и наглядных представлений при доказательстве геометрических теорем не стоит, нужно только научиться правильно ими пользоваться. В этом вам поможет решение следующих задач, также заимствованных

<sup>2</sup> Например, записать «единицу» на одном из формальных языков — языке теории множеств Н.Бурбаки — совсем непросто. «Полная запись содержала бы несколько десятков тысяч знаков, для «единицы» этого, пожалуй, многовато» (Манин Ю.И. *Доказуемое и недоказуемое*. М., Советское радио, 1979).



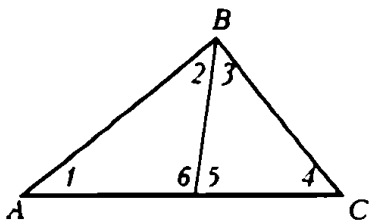


Рис. 3

из упомянутой книги Я.С.Дубнова.

**Задачи.** Найдите ошибки в следующих доказательствах.

1. Как известно, *сумма углов треугольника равна  $180^\circ$* . Доказательство этого факта опирается на аксиому параллельности. Мы сей-

час дадим *доказательство*, не использующее аксиомы параллельности.

Разобьем произвольный треугольник  $ABC$  на два треугольника (рис.3). Обозначим через  $x$  неизвестную нам пока сумму углов треугольника. Тогда  $\angle 1 + \angle 2 + \angle 6 = x$  и  $\angle 3 + \angle 4 + \angle 5 = x$ . Сложим эти два равенства:  $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 + \angle 5 + \angle 6 = 2x$ . Поскольку  $\angle 5 + \angle 6 = 180^\circ$ , а  $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4$  есть сумма углов треугольника  $ABC$ , т.е. равно  $x$ , мы получаем уравнение  $x + 180^\circ = 2x$ . Отсюда:  $x = 180^\circ$ .

2. Докажем «теорему»: *прямоугольник, вписанный в квадрат, также является квадратом*.

Рассмотрим квадрат  $ABCD$ ; пусть  $KLMN$  — вписанный прямоугольник (рис.4). Опустим перпендикуляры  $KP \perp AD$  и  $NQ \perp CD$ . Эти перпендикуляры

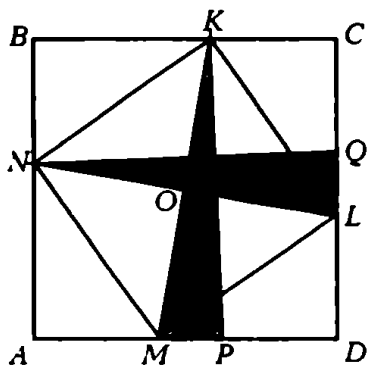


Рис. 4

равны по длине сторонам квадрата, поэтому они равны между собой. Отрезки  $KM$  и  $NL$  также равны по длине, как диагонали прямоугольника  $KLMN$ . Следовательно, прямоугольные треугольники  $KPM$  и  $NQL$  равны по гипотенузе и катету. Поэтому  $\angle KMP = \angle NLQ$ . Рассмотрим четырехугольник  $OLDM$ . Поскольку  $\angle OMP = \angle OLQ$ , сумма углов  $OLD$  и  $OMD$  равна  $180^\circ$ . Следовательно, сумма двух других

противоположных углов четырехугольника  $OLDM$  тоже равна  $180^\circ$ , т.е.  $\angle MOL + \angle MDL = 180^\circ$ . Но  $\angle MDL = 90^\circ$ , значит,  $\angle MOL$  — тоже прямой. Следовательно,  $KLMN$  — прямоугольник, диагонали которого перпендикулярны, т.е. квадрат.

3. Докажем «теорему»: *перпендикуляр и наклонная к прямой не пересекаются*.

Рассмотрим наклонную  $AP$  и перпендикуляр  $BQ$  к отрезку  $AB$  (рис.5). Пусть  $C$  — середина отрезка  $AB$ . Отложим отрезки

$AA_1$  и  $BB_1$ , по длине равные отрезку  $AC = BC$ . Мы утверждаем, что лучи  $AP$  и  $BQ$  не пересекаются на протяжении отрезков  $AA_1$  и  $BB_1$ . Действительно, если бы существовала точка пересечения  $K$ , то получился бы треугольник  $AKB$ , в котором  $AK \leq AA_1$ ,  $BK \leq BB_1$ , т.е.  $AK + KB \leq AA_1 + BB_1 = AB$ . Последнее неравенство противоречит тому, что сумма двух сторон треугольника больше третьей стороны.

Соединим теперь точки  $A_1$  и  $B_1$  и повторим предыдущее построение. Мы получим точки  $A_2$  и  $B_2$ , причем  $A_1A_2 = A_1C_1 = C_1B_1 = B_1B_2$ . Как и раньше, лучи  $AP$  и  $BQ$  не пересекаются на протяжении отрезков  $A_1A_2$  и  $B_1B_2$ . В частности, точки  $A_2$  и  $B_2$  различны и процесс построения можно продолжить неограниченно. Следовательно, лучи  $AP$  и  $BQ$  не пересекаются.

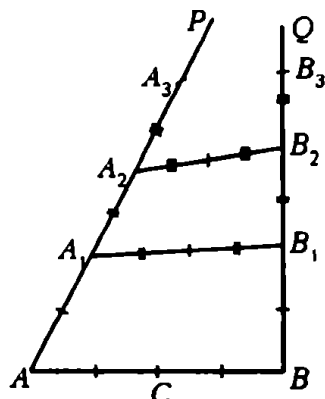


Рис. 5

4. Докажем, что все окружности имеют одинаковую длину.

Большая окружность на рисунке 6 совершает полный оборот, перемещаясь из точки  $A$  в точку  $B$ . Следовательно, расстояние  $AB$  равно длине большой окружности. Маленькая окружность внутри первой также совершает полный оборот, перемещаясь из точки  $C$  в точку  $D$ . Следовательно,  $CD$  равен длине малой окружности. Поскольку длины отрезков  $AB$  и  $CD$ , очевидно, равны, обе окружности имеют одинаковую длину.

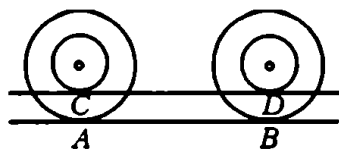


Рис. 6

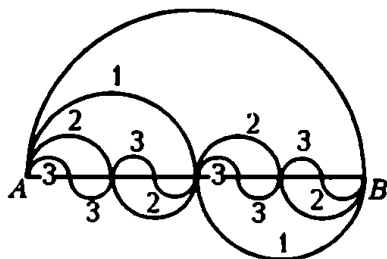


Рис. 7

5. Известно, что длина окружности радиусом  $R$  равна  $2\pi R$ . Но мы «докажем», что длина окружности вдвое больше ее диаметра.

Построим полуокружность с диаметром  $AB$  (рис.7). Разделим отрезок  $AB$  пополам точкой  $C$  и построим на отрезках  $AC$  и  $CB$  полуокружности, располагая их по разные стороны от прямой  $AB$ . Каждая из построенных полуокружностей имеет

диаметр, вдвое меньший, чем диаметр исходной полуокружности. Поэтому их длины вдвое меньше длины исходной полуокружности. Следовательно, длина волнообразной линии, помещенной на рисунке номером 1, равна длине данной полуокружности. Разделим теперь каждый из отрезков  $AC$  и  $CB$  пополам и построим волнообразную линию 2. Ее длина также равна длине исходной полуокружности. Продолжим этот процесс, получая на каждом шаге волнообразную линию той же длины. Расстояние от точек этой линии до прямой  $AB$  не превосходит радиуса полуокружностей, составляющих эту линию, т.е. стремится к нулю. Следовательно, последовательность волнообразных линий стремится к отрезку  $AB$ . Поскольку их длины равны длине данной полуокружности, такой же должна быть и длина отрезка

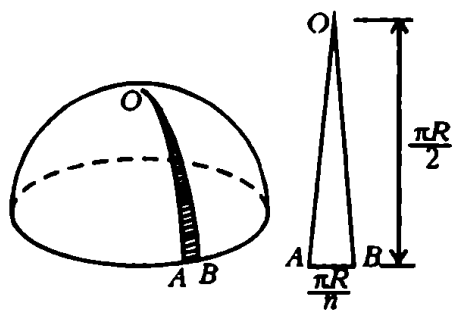


Рис. 5

$AB$ . Поэтому длина окружности равна ее удвоенному диаметру.

6. Докажем, что *площадь сферы радиусом  $R$  равна  $\pi^2 R^2$* .

Рассмотрим полусферу с полюсом  $O$  и разделим ее экватор на  $n$  равных частей. Площадь полусферы в  $n$  раз больше площади каждого из маленьких сферических тре-

угольников, изображенных на рисунке 8. Рассмотрим такой треугольник. Его основание равно  $2\pi R/n$ , а высота стремится к  $\pi R/2$  при  $n \rightarrow \infty$ . Следовательно, его площадь стремится к  $\pi^2 R^2/2n$ . Поэтому площадь полусферы равна

$$n \cdot \frac{\pi^2 R^2}{2n} = \frac{\pi^2 R^2}{2},$$

а площадь сферы —  $\pi^2 R^2$ .

Решение многих геометрических задач начинается с проведения вспомогательных линий, которые помогают установить связь между данными и неизвестными элементами фигуры. Отыскать удачное вспомогательное построение часто бывает нелегко. Поэтому к каждой решенной задаче следует присмотреться и постараться выяснить, почему те или иные вспомогательные линии приводят к цели. Нельзя ли найденный прием использовать при решении некоторых других задач?

**Пример 1.** В остроугольном треугольнике проведены высоты  $AP$ ,  $BQ$  и  $CR$ . Докажите, что  $\angle ABQ = \angle APR$ .

**Решение.** Пусть  $H$  — точка пересечения высот треугольника  $ABC$  (рис.1). Так как  $\angle APB$  и  $\angle CRB$  прямые, то около четырехугольника  $BPHR$  можно описать окружность, приняв  $BH$  за диаметр. Построив ее, замечаем, что  $\angle ABQ = \angle APR$  (как вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу).

Таким образом, построение вспомогательной окружности позволило использовать теорему о вписанных углах и благодаря этому установить связь между указанными в задаче углами.

Выясните, как изменится результат, если  $\angle B$  треугольника  $ABC$  тупой.

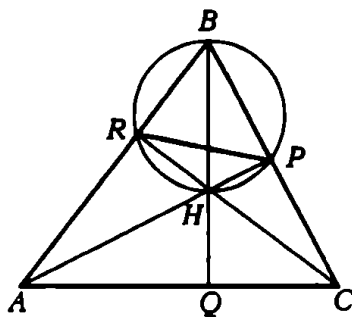


Рис.1

Решите самостоятельно несколько аналогичных задач.

1. Из произвольной точки  $M$  катета  $BC$  прямоугольного треугольника  $ABC$  опущен на гипотенузу  $AB$  перпендикуляр  $MN$ . Докажите, что  $\angle MAN = \angle MCN$ .

2. Докажите, что прямая, соединяющая вершину прямого угла прямоугольного треугольника с центром квадрата, внешне построенного на гипотенузе, делит прямой угол треугольника пополам.

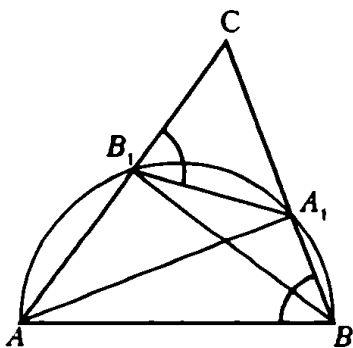


Рис. 2

3. Из произвольной точки  $M$  внутри данного угла опущены перпендикуляры  $MP$  и  $MQ$  на стороны угла. Из вершины угла  $A$  опущен перпендикуляр  $AK$  на отрезок  $PQ$ . Докажите, что  $\angle KAP = \angle MAQ$ .

**Пример 2.** Докажите, что отрезок, соединяющий основания двух высот остроугольного треугольника, отсекает от него треугольник, подобный данному.

**Решение.** Пусть  $AA_1$  и  $BB_1$  – высоты остроугольного треугольника  $ABC$  (рис.2).  $\angle AA_1B$  и  $\angle BB_1A$  прямые, поэтому окружность, построенная на стороне  $AB$  треугольника как на диаметре, пройдет через точки  $A_1$  и  $B_1$ . Далее,  $\angle ABC = 180^\circ - \angle AB_1A_1$ ,  $\angle A_1B_1C = 180^\circ - \angle AB_1A_1$ , поэтому  $\angle ABC = \angle A_1B_1C$ , и треугольники  $ABC$  и  $A_1B_1C$  подобны.

Эту задачу можно решить и без вспомогательных построений, если заметить, что треугольники  $AA_1C$  и  $BB_1C$  подобны, и записать пропорцию

$$\frac{A_1C}{AC} = \frac{B_1C}{BC}.$$

Решите каждую из двух следующих задач обоими способами.

4. Из вершины  $A$  параллелограмма  $ABCD$  проведены высоты  $AM$  и  $AN$ . Докажите, что треугольники  $AMN$  и  $ABC$  подобны.

5. Из основания  $H$  высоты  $CH$  треугольника  $ABC$  опущены на стороны  $AC$  и  $BC$  перпендикуляры  $HM$  и  $HN$ . Докажите, что треугольник  $CMN$  подобен треугольнику  $ABC$ .

Иногда выгодно описать окружность и около треугольника.

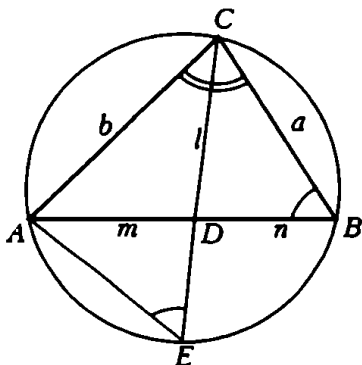


Рис. 3

**Пример 3.** Докажите, что квадрат биссектрисы треугольника равен разности между произведением заключающих ее сторон и произведением отрезков третьей стороны, на которые она делится биссектрисой.

**Решение.** Около треугольника  $ABC$  опишем окружность и продолжим биссектрису  $CD$  треугольника до встречи с окружностью в точке  $E$  (рис.3). Пусть  $BC = a$ ,  $AC = b$ ,  $AD = m$ ,  $BD = n$ ,  $CD = l$ ,  $DE = x$ .

По условию  $\angle ACE = \angle BCE$ , кроме того,  $\angle AEC = \angle ABC$ , как вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу. Следовательно, треугольники  $ACE$  и  $BCD$  подобны и справедливо равенство  $\frac{l+x}{b} = \frac{a}{l}$ , откуда  $l^2 = ab - lx$ . Хорды  $AB$  и  $CE$  пересекаются в точке  $D$ . Поэтому выполняется равенство  $lx = mn$ . Следовательно,  $l^2 = ab - mn$ .

**Пример 4.** Высота и медиана треугольника, проведенные из одной вершины внутри него, различны и образуют равные углы со сторонами, выходящими из той же вершины. Докажите, что треугольник прямоугольный.

**Решение.** Пусть высота  $CH$  и медиана  $CM$  треугольника  $ABC$  образуют со сторонами  $AC$  и  $BC$  равные углы (рис.4). Опишем около треугольника  $ABC$  окружность и продолжим медиану  $CM$  до встречи с окружностью в точке  $D$ . Рассмотрим треугольники  $ACH$  и  $BCD$ . Так как  $\angle ACH = \angle BCM$  по условию и  $\angle A = \angle D$  как вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу, то  $\angle AHC = \angle CBD = 90^\circ$ . Следовательно,  $CD$  — диаметр окружности.

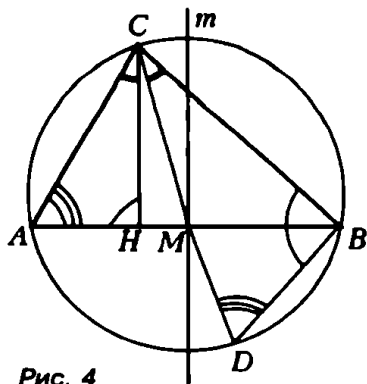


Рис. 4

Центр окружности лежит на диаметре  $CD$  и на перпендикуляре  $m$  к стороне  $AB$  в ее середине  $M$ . Так как медиана  $CM$  не является высотой, то прямые  $CD$  и  $m$  имеют только одну общую точку  $M$ , которая и является центром описанной окружности. Следовательно,  $AB$  — диаметр окружности и  $\angle ACB = 90^\circ$ .

Используйте полученный результат для решения следующих двух задач.

6. Определите углы треугольника, в котором

а) медиана и высота, проведенные из одной вершины, делят угол на три равные части;

б) медиана, биссектриса и высота, проведенные из одной вершины, делят угол при этой вершине на четыре равные части.

7. Постройте треугольник, зная углы, которые образуют медиана, биссектриса и высота, выходящие из одной вершины.

**Пример 5.** Постройте равносторонний треугольник так, чтобы вершины его лежали соответственно на трех данных параллельных прямых.

Известно несколько решений этой интересной задачи с использованием вращения вокруг точки, подобия и алгебраическо-

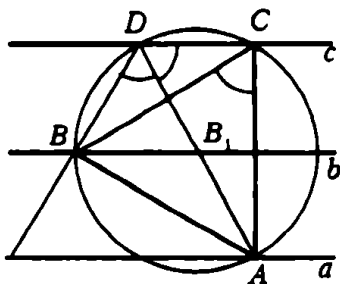


Рис. 5

основании свойства вписанных углов имеем  $\angle ADC = \angle ABC = 60^\circ$ .

Отсюда вытекает следующее построение. Из произвольной точки  $D$  прямой  $c$  проведем лучи, образующие с прямой  $c$  углы  $60^\circ$  и  $120^\circ$ . Пусть один из лучей пересечет прямую  $a$  в точке  $A$  и прямую  $b$  в точке  $B_1$ , а другой пересечет прямую  $b$  в точке  $B$ . Тогда отрезок  $AB$  будет стороной треугольника  $ABC$ .

Отложим на прямой  $c$  отрезок  $DC$ , равный отрезку  $AB_1$ , так, чтобы точки  $C$  и  $A$  лежали по одну сторону от прямой  $BD$ . Тогда точка  $C$  — третья вершина треугольника  $ABC$ , так как треугольники  $ABB_1$  и  $BCD$  равны, откуда следует, что  $AB = BC$  и  $\angle ABC = 60^\circ$ .

Таким образом, прием построения вспомогательной окружности целесообразно применять и при решении некоторых задач на построение.

Рассмотрим еще одну, более сложную, задачу, при решении которой самое трудное — догадаться описать около квадратов окружности.

**Пример 6.** На сторонах  $AC$  и  $BC$  треугольника  $ABC$  вне его построены квадраты  $ACA_1A_2$  и  $BCB_1B_2$ . Докажите, что прямые  $AB_1$ ,  $A_1B$  и  $A_2B_2$  пересекаются в одной точке, и определите углы между этими прямыми.

**Решение.** Если  $\angle ACB = 90^\circ$ , то справедливость теоремы очевидна. Прямые  $AB_1$  и  $A_1B$  перпендикулярны и каждая из них пересекает прямую  $A_2B_2$  в точке  $C$  под углом  $45^\circ$  (рис.6).

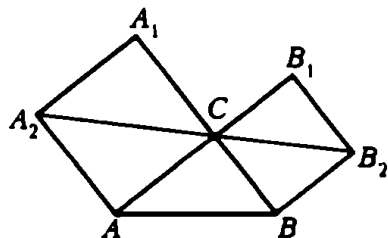


Рис. 6

Если  $\angle ACB \neq 90^\circ$ , то окружности, описанные около квадратов, имеют кроме точки  $C$  еще одну общую точку  $C_1$ , которая как раз и оказывается точкой пересечения прямых  $AB_1$ ,  $A_1B$  и  $A_2B_2$  (рис.7). Действительно,  $\angle A_2C_1C =$

$= 90^\circ$ , как вписанный, опирающийся на полуокружность. Аналогично  $\angle CC_1B_2 = 90^\circ$ . Поэтому  $\angle A_2C_1C + \angle CC_1B_2 = 180^\circ$ , т.е. лучи  $C_1A_2$  и  $C_1B_2$  составляют прямую.

Точно так же доказываются, что точка  $C_1$  лежит на прямых  $AB_1$  и  $A_1B$ .

Рассматривая полученные вписанные углы, находим, что прямые  $AB_1$  и  $A_1B$  взаимно перпендикулярны и каждая из этих прямых образует с прямой  $A_2B_2$  угол  $45^\circ$ .

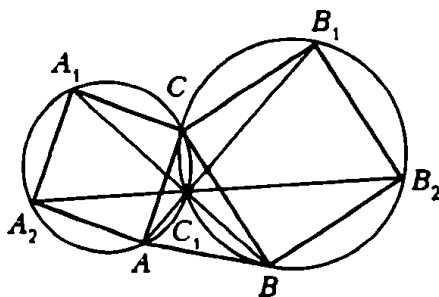


Рис. 7

Следующая задача имеет много общего с предыдущей.

8. На сторонах  $AB$ ,  $BC$  и  $CA$  произвольного треугольника  $ABC$  вне его построены равносторонние треугольники  $ABC_1$ ,  $BCA_1$  и  $CAB_1$ . Докажите, что прямые  $AA_1$ ,  $BB_1$ ,  $CC_1$  пересекаются в одной точке и каждая из них образует с другой угол  $60^\circ$ .

9. Докажите, что если два противоположных угла четырехугольника тупые, то диагональ, соединяющая вершины этих углов, короче второй диагонали.

Приведем еще две задачи на максимум и минимум, для решения которых также целесообразно определенным образом построить вспомогательную окружность.

10. На одной стороне угла с вершиной в точке  $S$  даны точки  $A$  и  $B$ . Найдите на другой стороне точку  $C$ , из которой отрезок  $AB$  виден под наибольшим углом.

11. Из произвольной точки  $M$ , лежащей на стороне  $AB$  треугольника  $ABC$  (или на ее продолжении), проведены перпендикуляры  $MP$  и  $MQ$  к сторонам  $AC$  и  $BC$ . При каком условии отрезок  $PQ$  будет наименьшим?

Таким образом, разнообразные геометрические задачи решаются с помощью одного и того же приема. Построение вспомогательной окружности позволяет увеличить число теорем, которыми можно пользоваться при решении задачи, и благодаря этому отыскивать зависимость между элементами фигуры.



# ТЕОРЕМА МОРЛЕЯ

Г.Тоноян, И.Яглом

В этой статье мы расскажем об одной геометрической теореме, известной под именем «теорема Морлея».

Френк Морлей (1860 — 1937) родился в Англии. Однако почти всю свою жизнь он провел в США, хотя и остался английским гражданином. Несколько десятков лет Морлей был профессором математики университета имени Джона Гопкинса в Балтиморе — одного из старейших американских университетов. Наряду с математикой он увлекался и шахматами и однажды сумел выиграть еще у одного видного математика — Эммануила Ласкера (1868 — 1941), тогдашнего чемпиона мира по шахматам.

Пусть  $ABC$  — произвольный треугольник. Хорошо известно, что биссектрисы его углов пересекаются в одной точке (рис.1). А что произойдет, если *биссектрисы* — т.е. прямые, делящие

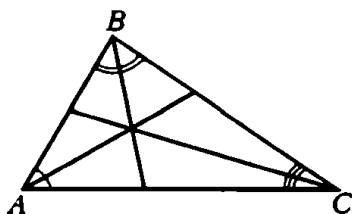


Рис. 1

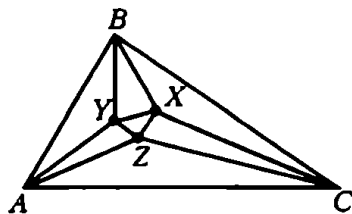


Рис. 2

угол пополам, заменить *трисектрисами* — прямыми, делящими угол на три равные части? Френк Морлей рассмотрел конфигурацию, приведенную на рисунке 2, и доказал, что точки  $X$ ,  $Y$  и  $Z$  при любом исходном треугольнике  $ABC$  являются вершинами *равностороннего* треугольника. Морлей рассказал об этом поразившем его факте своим друзьям, те — в свою очередь — своим, и вскоре «теорема о трисектрисах треугольника» распространилась по миру в качестве своеобразного математического фольклора.

Доказательство теоремы о трисектрисах Морлей опубликовал в 1914 году — через 15 лет после того, как нашел его. В 1924

году он изложил это доказательство более подробно и существенно усилил первоначальный результат. Доказательство Морлея весьма элегантно, но в то же время и достаточно сложно. Оно базируется на рассмотрении довольно изысканных линий — так называемых *кардиоид*<sup>1</sup>. Морлей установил, что множество центров кардиоид, касающихся всех трех сторон треугольника  $ABC$ , представляет собой совокупность девяти прямых, разбивающуюся на три тройки параллельных прямых, причем прямые из разных троек пересекаются под углом  $60^\circ$ . Ясно, что при пересечении этих прямых образуется 7 равносторонних треугольников. Один из них и есть «треугольник Морлея», а остальные фигурируют в обобщении теоремы Морлея, в котором рассматриваются трисектрисы и внутренних, и внешних углов треугольника.

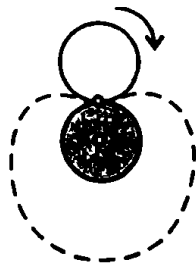


Рис. 3

Это обобщение обычно связывают с именем знаменитого французского математика Анри Лебега. В 1939 году Лебег опубликовал элементарное доказательство следующего факта, который сам Морлей умел доказывать только с помощью кардиоид. Лебег рассмотрел трисектрисы внутренних и внешних углов треугольника ( $3 \cdot 4 = 12$  прямых) и установил, что из точек пересечения этих прямых можно выбрать 27 троек точек, являющихся вершинами правильных треугольников. Заметим, что теорема о биссектрисах также допускает похожее обобщение: из шести биссектрис внутренних и внешних углов треугольника можно выбрать четыре тройки прямых, сходящихся в одной точке (рис.4).

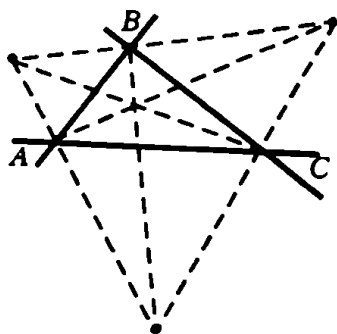


Рис. 4

Первые элементарные доказательства теоремы Морлея были получены в 1909 году индусами М.Сатьянараяном (вычислительно-тригонометрическое доказательство) и М.Т.Нараньенгаром (чисто геометрическое доказательство; в 1922 году оно было переоткрыто англичанином Дж.М.Чилдом). В настоящее время известно

<sup>1</sup> Кардиоида — это кривая, которую описывает точка окружности, катящейся без скольжения по неподвижной окружности того же радиуса (рис.3). Центр неподвижной окружности иногда называют центром кардиоиды.

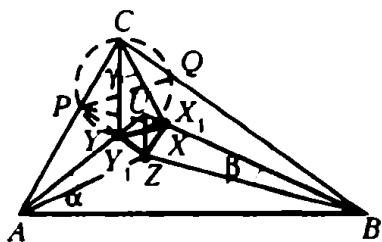


Рис. 5

уже, по крайней мере, несколько десятков доказательств теоремы Морлея. Однако интерес к ней не затухает, и все время появляются новые доказательства, обобщения и варианты этого изящного предложения.

Ниже мы приводим два элементарных доказательства теоремы Морлея.

**Доказательство первое** (геометрическое; оно совпадает, по существу, с доказательством Нараньенгара — Чилда). Обозначим величины углов треугольника  $ABC$  через  $3\alpha$ ,  $3\beta$  и  $3\gamma$  (рис. 5). Так как  $3\alpha + 3\beta + 3\gamma = 180^\circ$ , то  $\alpha + \beta + \gamma = 60^\circ$  и  $\alpha + \beta = 60^\circ - \gamma$ . Пусть  $U$  — точка пересечения трисектрис  $AY$  и  $BX$ . Так как  $AZ$  и  $BZ$  — биссектрисы треугольника  $AUB$ , то  $ZU$  — тоже биссектриса этого треугольника. Поэтому

$$\begin{aligned}\angle AUZ = \angle ZUB &= \frac{1}{2} \angle AUB = \frac{1}{2} (180^\circ - 2\alpha - 2\beta) = \\ &= 90^\circ - (\alpha + \beta) = 90^\circ - (60^\circ - \gamma) = 30^\circ + \gamma.\end{aligned}$$

Построим теперь равносторонний  $\triangle X_1Y_1Z$ , одна вершина которого совпадает с точкой  $Z$ , а вершины  $X_1$  и  $Y_1$  принадлежат соответственно прямым  $BX$  и  $AY$  (несколько ниже будет доказано, что они совпадают с точками  $X$  и  $Y$ ). Для этого проведем через  $Z$  под углом  $30^\circ$  к лучу  $ZU$  два луча  $ZX_1$  и  $ZY_1$ ; через  $X_1$  и  $Y_1$  мы обозначим точки пересечения этих лучей с  $BX$  и с  $AY$  (т.е. с  $BU$  и с  $AU$ ). Так как, очевидно,  $\triangle ZX_1U = \triangle ZY_1U$  (эти треугольники имеют равные углы и общую сторону), то  $ZX_1 = ZY_1$ ; поэтому  $\triangle ZY_1X_1$  — равнобедренный треугольник с углом при вершине в  $60^\circ$ , т.е. *равносторонний* треугольник.

Обозначим, далее, через  $P$  и  $Q$  точки, симметричные точке  $Z$  относительно прямых  $AY$  и  $BX$ . Так как  $AY$  и  $BX$  — биссектрисы углов  $ZAC$  и  $ZBC$ , точка  $P$  принадлежит стороне  $AC$  треугольника  $ABC$ , а точка  $Q$  — стороне  $BC$ .

Найдем величины углов  $\angle PY_1X_1$  и  $\angle QX_1Y_1$ . Так как  $\angle ZX_1Y_1 = 60^\circ$  (угол равностороннего треугольника),  $\angle ZX_1B = \angle X_1ZU + \angle X_1UZ = 30^\circ + (30^\circ + \gamma)$  (внешний угол  $\triangle ZX_1U$ ) и  $\angle QX_1B = \angle ZX_1B$  (эти углы симметричны относительно прямой  $BU$ ),

$$\angle QX_1Y_1 = 360^\circ - 60^\circ - (60^\circ + \gamma) - (60^\circ + \gamma) = 180^\circ - 2\gamma.$$

Точно так же доказывается и равенство  $\angle PY_1X_1 = 180^\circ - 2\gamma$ .

Таким образом,  $\angle PY_1X_1 = \angle QX_1Y_1$ ; кроме того,  $PY_1 = Y_1Z = ZX_1 = X_1Q$  (первые два отрезка симметричны относительно прямой  $AU$ , а два последних — относительно прямой  $BV$ ). Отсюда следует, что четырехугольник  $PY_1X_1Q$  является *равнобедренной трапецией* (с углами  $Y_1$  и  $X_1$ , равными  $180^\circ - 2\gamma$ , и, значит, с углами  $P$  и  $Q$ , равными  $2\gamma$ ).

Опишем теперь окружность вокруг трапеции  $PY_1X_1Q$ . Так как хорды  $PY_1$ ,  $Y_1X_1$  и  $X_1Q$  этой окружности равны, равны и опирающиеся на эти хорды вписанные углы; поэтому  $\angle PQY_1 = \angle Y_1PX_1 = \angle X_1PQ = \gamma$ . Но  $\angle PCQ = 3\gamma$ ; поэтому описанная вокруг  $PY_1X_1Q$  окружность  $S$  пройдет и через точку  $C$ . А теперь из равенства (стягиваемых равными хордами) дуг  $PY_1$ ,  $Y_1X_1$  и  $X_1Q$  окружности  $S$  следует, что  $\angle PCY_1 = \angle Y_1CX_1 = \angle X_1CQ = \gamma$ , откуда и вытекает совпадение  $\Delta X_1Y_1Z$  с  $\Delta XYZ$ .

Этим и завершается доказательство теоремы Морлея.

**Доказательство второе** (вычислительное — оно близко к доказательству М.Сатьянараяна). Будем по-прежнему считать, что  $\angle A = 3\alpha$ ,  $\angle B = 3\beta$ ,  $\angle C = 3\gamma$ ; длины сторон  $BC$ ,  $CA$  и  $AB$  треугольника  $ABC$  обозначим через  $a$ ,  $b$  и  $c$ , а диаметр описанной около него окружности — через  $d$  (рис.6).

Попытаемся вычислить длину  $XU = z$  стороны  $XU$  треугольника  $XUW$ . Для этого мы найдем, прежде всего, отрезки  $CX = m$  и  $CY = n$ ; после этого  $XU$  можно будет найти по теореме косинусов из  $\Delta CXU$ . Для того же, чтобы вычис-

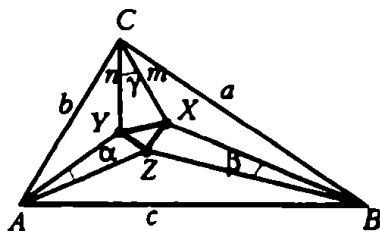


Рис. 6

лить  $m$  и  $n$ , воспользуемся теоремой синусов. Применив эту теорему к  $\Delta AYC$  со сторонами  $AC = b$  и  $CY = n$  и углами  $\angle A = \alpha$ ,  $\angle C = \gamma$  и  $\angle Y = 180^\circ - (\alpha + \gamma) = 180^\circ - (60^\circ - \beta) = 120^\circ + \beta$  (здесь мы снова использовали очевидное равенство  $\alpha + \beta + \gamma = 60^\circ$ ), получим

$$\frac{n}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin (120^\circ + \beta)},$$

или

$$n = b \sin \alpha / \sin (120^\circ + \beta).$$

Но в силу той же теоремы синусов (которую мы теперь будем применять уже к «большому»  $\Delta ABC$ )

$$b / \sin \angle B = d,$$

или

$$b = d \sin \angle B = d \sin 3\beta.$$

Поэтому

$$n = d \sin \alpha \sin 3\beta / \sin(120^\circ + \beta) = d \sin \alpha \sin 3\beta / \sin(60^\circ - \beta).$$

Но (вот здесь придется немного запастись терпением!)

$$\begin{aligned} \sin 3\beta &= \sin(2\beta + \beta) = \sin 2\beta \cos \beta + \cos 2\beta \sin \beta = \\ &= 2 \sin \beta \cos^2 \beta + (1 - 2 \sin^2 \beta) \sin \beta = \\ &= 2 \sin \beta (1 - \sin^2 \beta) + \sin \beta - 2 \sin^3 \beta = 3 \sin \beta - 4 \sin^3 \beta. \end{aligned}$$

Последнее выражение можно далее преобразовать так:

$$\begin{aligned} \sin 3\beta &= 3 \sin \beta - 4 \sin^3 \beta = 4 \sin \beta \left[ \frac{3}{4} - \sin^2 \beta \right] = \\ &= 4 \sin \beta \left[ \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 - \sin^2 \beta \right] = 4 \sin \beta [\sin^2 60^\circ - \sin^2 \beta] = \\ &= 4 \sin \beta (\sin 60^\circ + \sin \beta)(\sin 60^\circ - \sin \beta) = 4 \sin \beta \cdot 2 \sin \frac{60^\circ + \beta}{2} \times \\ &\times \cos \frac{60^\circ - \beta}{2} \cdot 2 \cos \frac{60^\circ + \beta}{2} \sin \frac{60^\circ - \beta}{2} = 4 \sin \beta \cdot 2 \sin \frac{60^\circ + \beta}{2} \cos \frac{60^\circ + \beta}{2} \times \\ &\times 2 \sin \frac{60^\circ - \beta}{2} \cos \frac{60^\circ - \beta}{2} = 4 \sin \beta \sin(60^\circ + \beta) \sin(60^\circ - \beta). \end{aligned}$$

Подставляя это выражение для  $\sin 3\beta$  в формулу для  $n$ , получим

$$n = 4d \sin \alpha \sin \beta \sin(60^\circ + \beta).$$

Совершенно аналогично доказывается, что

$$m = 4d \sin \alpha \sin \beta \sin(60^\circ + \alpha).$$

Применим теперь, как мы и собирались, теорему косинусов к  $\triangle CXY$ :

$$\begin{aligned} z^2 = XY^2 = m^2 + n^2 - 2mn \cos \gamma &= 16d^2 \sin^2 \alpha \sin^2 \beta [\sin^2(60^\circ + \alpha) + \\ &+ \sin^2(60^\circ + \beta) - 2 \sin(60^\circ + \alpha) \sin(60^\circ + \beta) \cos \gamma]. \end{aligned}$$

Заметим теперь, что

$$(60^\circ + \alpha) + (60^\circ + \beta) + \gamma = 120^\circ + (\alpha + \beta + \gamma) = 120^\circ + 60^\circ = 180^\circ;$$

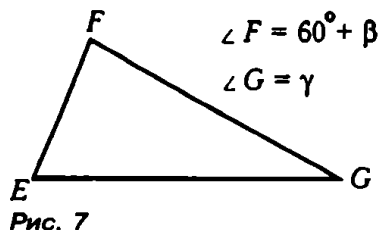
поэтому существует  $\triangle EFG$  с углами  $\angle E = 60^\circ + \alpha$ ,  $\angle F = 60^\circ + \beta$  и  $\angle G = \gamma$  (рис.7).

Предположим, что диаметр  $\delta$  описанной вокруг этого треугольника окружности равен 1. Тогда в силу теоремы синусов стороны треугольника будут равны

$$e = FG = \sin(60^\circ + \alpha),$$

$$f = EG = \sin(60^\circ + \beta),$$

$$g = EF = \sin \gamma.$$



Применив к этому  $\triangle EFG$  теорему косинусов, получаем, что

$$\begin{aligned} \sin^2(60^\circ + \alpha) + \sin^2(60^\circ + \beta) - 2 \sin(60^\circ + \alpha) \sin(60^\circ + \beta) \cos \gamma = \\ = e^2 + f^2 - 2ef \cos \gamma = g^2 = \sin^2 \gamma. \end{aligned}$$

Таким образом, получаем, что

$$z^2 = 16d^2 \sin^2 \alpha \sin^2 \beta \sin^2 \gamma$$

и, значит,

$$z = 4d \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma.$$

Но выражения для длин  $y = XZ$  и  $x = YZ$  отрезков  $XZ$  и  $YZ$  получаются из выражения для длины  $z$  отрезка  $XY$  циклической перестановкой углов  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$ . А так как углы  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$  входят в выражение для  $z$  симметрично, то  $x = y = z = 4d \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma$  — и, значит,  $\triangle XYZ$  сторонами длин  $x, y$  и  $z$  — *равносторонний*.

### Упражнения

1. На рисунке 8 наряду с вершинами  $X, Y$  и  $Z$  треугольника Морлея изображены также точки  $U, V$  и  $W$  пересечения  $AU$  и  $BX$  (эта точка имеется также на рисунке 5 — она играла большую роль в 1-м доказательстве теоремы Морлея);  $AZ$  и  $CX$ ;  $CY$  и  $BZ$ . Докажите, что отрезки  $XW, YV$  и  $ZU$  пересекаются в одной точке  $Q$ .

2. Докажите, что фигурирующая в задаче 1 точка  $Q$  является центром правильного треугольника Морлея  $XYZ$ .

3. Докажите, что

а) отрезки  $AX, BY$  и  $CZ$  (где  $XYZ$  — «треугольник Морлея» для  $\triangle ABC$ ) пересекаются в одной точке  $R$ ;

б) прямые  $AW, BV$  и  $CU$  (рис.8) пересекаются в одной точке  $S$ ;

в) точки  $R, S$  и точка  $Q$  задачи 1 лежат на одной прямой.

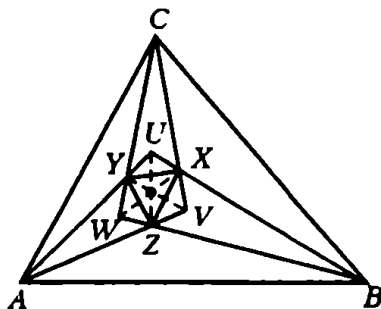


Рис. 8

4. Пусть  $\bar{X}$ ,  $\bar{Y}$ ,  $\bar{Z}$  — такие точки внутри (произвольного)  $\triangle ABC$ , что  $\angle B\bar{A}\bar{Z} = \angle C\bar{A}\bar{Y} (= \alpha)$ ,  $\angle CB\bar{X} = \angle AB\bar{Z} (= \beta)$ ,  $\angle BC\bar{X} = \angle AC\bar{Y} (= \gamma)$ . Докажите, что прямые  $A\bar{X}$ ,  $B\bar{Y}$ ,  $C\bar{Z}$  пересекаются в одной точке  $\bar{R}$  (ср. с задачей 3,а).

5. Дополните следующее «косвенное» доказательство теоремы Морлея для треугольника  $ABC$  с углами  $\angle A = 3\alpha$ ,  $\angle B = 3\beta$  и  $\angle C = 3\gamma$ . Пусть  $XYZ$  — произвольный *равносторонний* треугольник. На его сторонах построим вне  $\triangle XYZ$  равнобедренные треугольники  $X\bar{Y}U$ ,  $Y\bar{Z}W$  и  $Z\bar{X}V$  (ср. рис.8) с углами при основаниях  $XU$ ,  $YZ$  и  $ZX$ , соответственно равными  $60^\circ - \gamma$ ,  $60^\circ - \alpha$  и  $60^\circ - \beta$ . Обозначим, далее, точку пересечения прямых  $UY$  и  $VZ$  через  $A$ ;  $UX$  и  $WZ$  — через  $B$  и  $VX$  и  $WY$  — через  $C$ . Докажите, что углы  $\triangle ABC$  равны  $3\alpha$ ,  $3\beta$  и  $3\gamma$  и что прямые  $AU$  и  $AZ$ ;  $BZ$  и  $BX$ ;  $CX$  и  $CY$  являются трисектрисами этого треугольника. Это доказательство мы называли «косвенным», так как в нем исходный  $\triangle ABC$  строится по его «треугольнику Морлея»  $XYZ$ .

6. Дополните следующее доказательство теоремы Морлея. Пусть  $W$  — такая точка внутри  $\triangle ABC$ , что  $\angle WBA = \frac{1}{3} \angle ABC$  и  $\angle WCA = \frac{1}{3} \angle ACB$ , и пусть  $X$  — центр вписанной окружности  $\triangle WBC$ , а  $Y$  и  $Z$  — такие точки отрезков  $CW$ , соответственно  $BW$ , что  $\angle YXW = \angle ZXW = 30^\circ$  (при этом  $\triangle XYZ$  — равносторонний). Обозначим через  $O$  центр (правильного)  $\triangle XYZ$ , а через  $U$  и  $V$  точки пересечения прямых  $ZO$ , соответственно  $YO$ , с прямыми  $BX$  и  $CX$ . Наконец, через  $A'$  обозначим точку пересечения прямых  $UY$  и  $VZ$ . Докажите, что  $A'$  совпадает с  $A$  и что  $\triangle XYZ$  — «треугольник Морлея» для  $\triangle ABC$ . (Это доказательство теоремы Морлея принадлежит индусу К.Венкаташальенгару.)

7. а) При каких углах  $\triangle ABC$  пятиугольник  $CPYXQ$  (см. рис.5) будет правильным?

б) Докажите, что если  $\triangle ABC$  правильный, то ломаная  $PYXQ$  (см. рис.5) может быть дополнена до правильного 9-угольника, вершина  $C$  которого противоположна стороне  $XU$ .

8. Докажите сформулированное в начале статьи утверждение Лебега о 27 правильных треугольниках, образованных точками пересечения трисектрис внутренних и внешних углов данного  $\triangle ABC$ .

9. Назовем многоугольник  $A_1A_2A_3\dots A_n$  *многоугольником Морлея*, если, проведя «трисектрисы»  $A_1X_1$ ,  $A_1X_2$ ;  $A_2X_2$ ,  $A_2X_3$ ;  $A_3X_3$ ,  $A_3X_4$ ; ...;  $A_nX_n$ ,  $A_nX_1$  его углов (где луч  $A_1X_1$  ближе к стороне  $A_1A_n$ , луч  $A_2X_2$  ближе к  $A_2A_1$ , ..., луч  $A_nX_n$  ближе к стороне  $A_nA_{n-1}$ ), мы придем к правильному многоугольнику  $X_1X_2X_3\dots X_n$ . Из теоремы Морлея следует, что каждый треугольник является многоугольником Морлея; очевидно также, что каждый правильный многоугольник — «морлеев» и что, скажем, никакой отличный от квадрата прямоугольник не является многоугольником Морлея (почему?). Можете ли вы указать хоть один «морлеев многоугольник», отличный от треугольника и от правильного многоугольника?

Свойства треугольника были хорошо изучены еще древними греками.

В знаменитых «Началах» Евклида доказывается, что центром окружности, описанной около треугольника, является точка пересечения серединных перпендикуляров к его сторонам.

Архимед, определяя положение центра тяжести однородной треугольной пластинки, установил, что он лежит на каждой из трех медиан. Точку пересечения медиан треугольника называют *центром тяжести* или *центроидом* треугольника.

Позднее было доказано, что три высоты треугольника также пересекаются в одной точке, которая называется его *ортоцентром*.

Закономерность в расположении этих трех замечательных точек треугольника — центра  $O$  описанной окружности, центроида  $G$  и ортоцентра  $H$  — впервые обнаружил знаменитый математик Леонард Эйлер (1707 — 1783). Рассмотрим сначала один частный случай: прямоугольный треугольник  $ABC$  (рис. 1).

Середина  $O$  гипотенузы  $AB$  является центром описанной около него окружности. Центроид  $G$  делит медиану  $CO$  в отношении  $2 : 1$ , считая от вершины  $C$ . Катеты  $AC$  и  $BC$  являются высотами треугольника, поэтому вершина  $C$  прямого угла совпадает с ортоцентром  $H$  треугольника. Таким образом, точки  $O$ ,  $G$ ,  $H$  лежат на одной прямой,

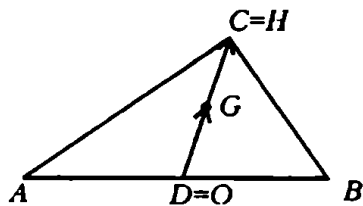


Рис. 1

причем  $\vec{OH} = 3\vec{OG}$ . Пользуясь методом координат, Эйлер доказал, что такая же связь существует между тремя указанными точками любого треугольника. Мы докажем этот факт с помощью векторов, причем от читателя требуется знакомство лишь с простейшими операциями: сложением векторов и умножением вектора на число.



## Деление отрезка в данном отношении

Пусть  $A$ ,  $B$  и  $O$  – данные точки плоскости, и известно, что точка  $G$  делит отрезок  $AB$  в отношении  $k$ :  $\frac{\vec{AG}}{\vec{GB}} = k$  (рис.2).

Выразим вектор  $\vec{OG}$  через векторы  $\vec{OA}$  и  $\vec{OB}$ . Для этого

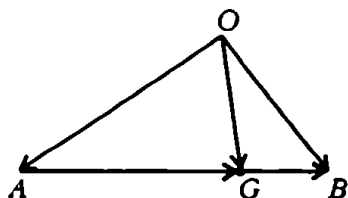


Рис. 2

подставим в равенство  $\vec{AG} = k \times \vec{GB}$  выражения всех векторов через  $\vec{OG}$ ,  $\vec{OA}$  и  $\vec{OB}$ :  $\vec{OG} - \vec{OA} = k(\vec{OB} - \vec{OG})$ . Решая это уравнение относительно  $\vec{OG}$ , получим

$$\vec{OG} = \frac{\vec{OA} + k\vec{OB}}{1+k}. \quad (1)$$

Например, если  $G$  – середина отрезка  $\vec{AB}$ , то  $k = 1$  и  $\vec{OG} = \frac{1}{2}(\vec{OA} + \vec{OB})$ .

### Теорема о пересечении медиан треугольника в одной точке

Здесь мы попутно получим одно векторное равенство, которое понадобится нам в дальнейшем.

**Теорема 1.** Медианы треугольника  $ABC$  пересекаются в одной точке  $G$  и делятся ею в отношении  $2 : 1$ , считая от вершины, причем

$$3\vec{PG} = \vec{PA} + \vec{PB} + \vec{PC}, \quad (2)$$

где  $P$  – любая точка плоскости или пространства.

**Доказательство.** Возьмем на медиане  $CD$  треугольника  $ABC$  точку  $G$ , определяемую соотношением  $|CG| : |GD| = 2 : 1$  (рис.3).

Согласно формуле (1),

$$\vec{PG} = \frac{\vec{PC} + 2\vec{PD}}{3},$$

$$\vec{PD} = \frac{1}{2}(\vec{PA} + \vec{PB}),$$

откуда

$$\vec{PG} = \frac{1}{3}(\vec{PA} + \vec{PB} + \vec{PC}).$$

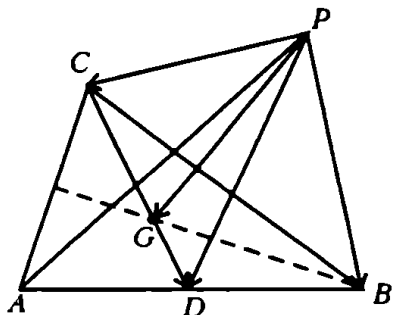


Рис. 3

Вычисляя вектор  $\vec{PG'}$  с концом в точке  $G'$ , делящей любую из двух других медиан треуголь-

ника в отношении 2 : 1 (считая от вершины), мы получим справа то же самое выражение:

$$\vec{PG'} = \frac{1}{3}(\vec{PA} + \vec{PB} + \vec{PC}),$$

поэтому  $\vec{PG'} = \vec{PG}$ , и точка  $G'$  совпадает с точкой  $G$ . Следовательно, все три медианы треугольника пересекаются в одной точке  $G$ , определяемой соотношением (2).

### Теорема о высотах произвольного треугольника

**Теорема 2.** Высоты треугольника  $ABC$  пересекаются в одной точке  $H$ , причем

$$\vec{OH} = \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}, \quad (3)$$

где  $O$  — центр окружности, описанной около треугольника.

**Доказательство.** Пусть  $ABC$  — треугольник, отличный от прямоугольного (рис. 4). Найдем сумму векторов  $\vec{OA}$  и  $\vec{OB}$ . Для этого построим точку  $M$ , симметричную  $O$  относительно стороны  $AB$ , тогда  $\vec{OM} = \vec{OA} + \vec{OB}$ . Затем построим точку  $H$ , для которой

$$\vec{OH} = \vec{OM} + \vec{OC} = \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC},$$

и докажем, что точка  $H$  и есть ортоцентр треугольника  $ABC$ .

Действительно, по построению прямые  $CH$  и  $OM$  параллельны,  $OM$  — серединный перпендикуляр к отрезку  $AB$ , следовательно, прямая  $CH$  также перпендикулярна к прямой  $AB$ , и точка  $H$  лежит на высоте треугольника  $ABC$ , проведенной из вершины  $C$ .

Если повторить построение, начиная с векторов  $\vec{OA}$  и  $\vec{OC}$ , то получится та же точка  $H$ , но те же рассуждения показывают, что теперь точка  $H$  лежит на высоте треугольника, проведенной из вершины  $B$ . Аналогично получим, что точка  $H$  лежит на высоте, проведенной из вершины  $A$ . Следовательно, высоты треугольника  $ABC$  пересекаются в точке  $H$ , определяемой соотношением (3).

Легко проверить, что теорема 2 справедлива и для прямоугольного треугольника.

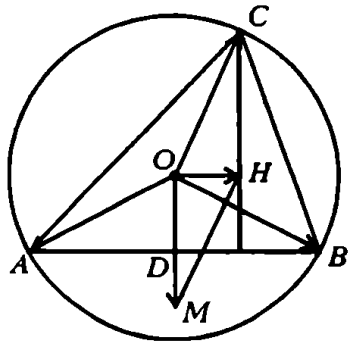


Рис. 4

## Прямая Эйлера

Из доказанных теорем 1 и 2 вытекает интересное нас свойство замечательных точек треугольника.

**Теорема 3.** *Центр  $O$  описанной окружности, центроид  $G$  и ортоцентр  $H$  любого треугольника лежат на одной прямой, причем точка  $G$  лежит между точками  $O$  и  $H$  и  $OG : GH = 1 : 2$ .*

**Доказательство.** По теореме 1

$$3\vec{OG} = \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}.$$

Сравнивая это равенство с равенством (3), получим

$$\vec{OH} = 3\vec{OG}.$$

Следовательно, векторы  $\vec{OH}$  и  $\vec{OG}$ , имеющие общее начало  $O$ , расположены на одной прямой и  $|\vec{OG}| : |\vec{GH}| = 1 : 2$ .

Прямая, на которой лежат точки  $O$ ,  $G$  и  $H$ , называется *прямой Эйлера*.

\* \* \*

В стереометрии простейший многогранник — тетраэдр (треугольная пирамида) играет ту же роль, что и треугольник в планиметрии. Свойства треугольника и тетраэдра во многом схожи. Попробуем распространить свойство замечательных точек треугольника на тетраэдр.

## Сфера, описанная около тетраэдра

Известно, что около всякого тетраэдра можно описать сферу, ее центр  $O$  лежит на перпендикулярах к граням тетраэдра, восстановленных в центрах окружностей, описанных около граней.

## Медианы тетраэдра

Отрезок, соединяющий вершину тетраэдра с центроидом противоположной грани, называется *медианой* тетраэдра. Свойства медиан тетраэдра аналогичны свойствам медиан треугольника.

**Теорема 4.** *Четыре медианы тетраэдра  $ABCD$  пересекаются в одной точке  $G$ , которая делит каждую из них в отношении  $3 : 1$ , считая от вершины тетраэдра, причем*

$$4\vec{PG} = \vec{PA} + \vec{PB} + \vec{PC} + \vec{PD}, \quad (4)$$

где  $P$  — любая точка пространства.

**Доказательство.** Возьмем на медиане  $DG_1$  тетраэдра  $ABCD$  точку  $G$ , определяемую соотношением  $DG : GG_1 = 3 : 1$  (рис.5). Согласно формуле (1),

$$\vec{PG} = \frac{\vec{PD} + 3\vec{PG}_1}{4}.$$

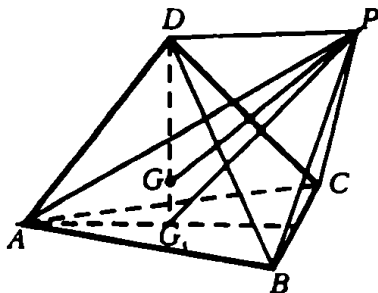


Рис. 5

Учитывая, что центроид  $G_1$  треугольника  $ABC$  удовлетворяет соотношению  $3\vec{PG}_1 = \vec{PA} + \vec{PB} + \vec{PC}$ , получим

$$\vec{PG} = \frac{1}{4}(\vec{PA} + \vec{PB} + \vec{PC} + \vec{PD}).$$

Вычисляя вектор  $\vec{PG}'$  с концом в точке  $G'$ , делящей любую из трех других медиан тетраэдра в отношении 3 : 1 (считая от вершины), получим то же самое выражение. А это означает, что все четыре медианы тетраэдра пересекаются в одной точке  $G$ , удовлетворяющей соотношению (4). Точка  $G$  называется *центром тяжести* (или *центроидом*) тетраэдра.

### Высоты тетраэдра

Высоты треугольника всегда пересекаются в одной точке. По аналогии можно предположить, что высоты любого тетраэдра также пересекаются в одной точке. Однако это не так.

Для примера рассмотрим тетраэдр  $ABCD$  с прямым двугранным углом при ребре  $AB$ , в котором  $AC = BC$ , но  $AD \neq BD$  (рис.6). Высоты  $CE$  и  $DF$  тетраэдра лежат соответственно в гранях  $ABC$  и  $ABD$ , но точка  $E$  — середина  $AB$ , а  $F$  — нет. Если бы длины ребер  $DA$  и  $DB$  были равны, то основания  $E$  и  $F$  высот совпадали бы, но две другие высоты тетраэдра не могут проходить через точку  $E$ .

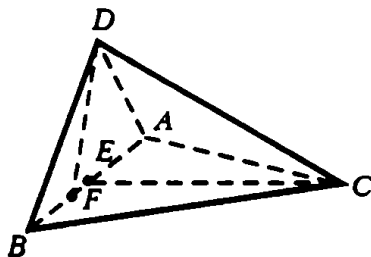


Рис. 6

Таким образом, даже две высоты тетраэдра могут не иметь общей точки.

Тем не менее существуют и тетраэдры, все четыре высоты которых пересекаются в одной точке. Таким будет, например, тетраэдр  $ABCD$  с прямыми плоскими углами при вершине  $D$ . Ребра  $DA$ ,  $DB$  и  $DC$  являются его высотами, а вершина  $D$  — *ортоцентром* (точкой пересечения всех четырех высот).

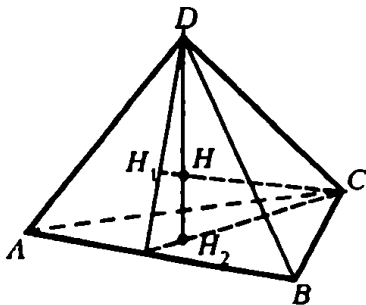


Рис. 7

Попробуем найти все тетраэдры, у которых высоты пересекаются в одной точке.

Пусть высоты тетраэдра  $ABCD$ , проведенные из вершин  $C$  и  $D$ , пересекаются в точке  $H$  (рис.7). Тогда  $CH_1 \perp AB$  и  $DH_2 \perp AB$ , т.е. прямая  $AB$  перпендикулярна к двум пересекающимся прямым, лежащим в плоскости  $CDH$ , следовательно,

$AB \perp CD$ . Аналогично доказывается, что если две другие высоты тетраэдра  $ABCD$  проходят через ту же точку  $H$ , то  $AC \perp BD$  и  $AD \perp BC$ . Итак, если все высоты тетраэдра пересекаются в одной точке, то противоположные ребра тетраэдра взаимно перпендикулярны. Такой тетраэдр называется *ортоцентрическим*.

**Теорема 5.** *Четыре высоты ортоцентрического тетраэдра  $ABCD$  пересекаются в одной точке  $H$ , причем если  $O$  — центр сферы, описанной около тетраэдра, то*

$$\vec{OH} = \frac{1}{2}(\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OD}). \quad (5)$$

**Доказательство.** Пусть  $ABCD$  — ортоцентрический тетраэдр,  $DG_1$  — его медиана,  $DH_1$  — его высота (рис.8). Тогда  $G_1$  — центроид, а  $H_1$  — ортоцентр треугольника  $ABC$  (докажите это самостоятельно — именно здесь используется перпендикулярность противоположных ребер тетраэдра), причем точки  $O_1$  (центр окружности, описанной около треугольника  $ABC$ ),  $G_1$  и  $H_1$  лежат на одной прямой. Заметим, что центр  $O$  сферы, описанной около тетраэдра  $ABCD$ , лежит на перпендикуляре к плоскости треугольника  $ABC$ , восставленном в точке  $O_1$ .

Будем доказывать теорему тем же способом, что и теорему 2 для треугольника: строить разными способами точку  $H$ , удовлетворяющую соотношению (5).

Вначале сложим векторы  $\vec{OA}$ ,  $\vec{OB}$  и  $\vec{OC}$ :

$$\vec{OM} = \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}.$$

По теореме 1  $\vec{OG}_1 = \frac{1}{3}(\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC})$ , поэтому  $\vec{OM} = 3\vec{OG}_1$

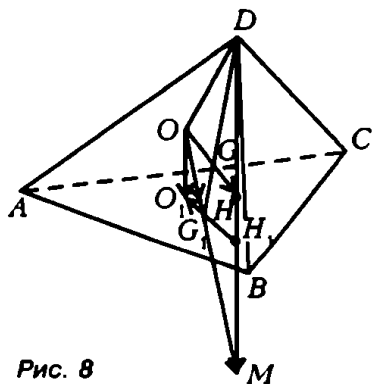


Рис. 8

или  $G_1\vec{M} = 2\vec{OG}_1$ . Точки  $O_1, G_1, H_1$  лежат на прямой Эйлера треугольника  $ABC$ , причем  $H_1\vec{G}_1 = 2\vec{G}_1\vec{O}_1$ . Следовательно,

$$H_1\vec{M} = H_1\vec{G}_1 + G_1\vec{M}_1 = 2\left(\vec{G}_1\vec{O}_1 + \vec{OG}_1\right) = 2\left(\vec{OG}_1 + G_1\vec{O}_1\right) = 2\vec{OO}_1.$$

Отсюда вытекает, что прямые  $H_1M$  и  $OO_1$  параллельны, а так как прямая  $OO_1$  перпендикулярна к плоскости  $ABC$ , то и прямая  $H_1M$  перпендикулярна к этой плоскости. Следовательно, точка  $M$  лежит на прямой  $DH_1$  (если точки  $O$  и  $O_1$  совпадают, то точки  $M$  и  $H_1$  тоже совпадают).

Пусть теперь  $\vec{OH} = \frac{1}{2}(\vec{OM} + \vec{OD}) = \frac{1}{2}(\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OD})$ . Из левого равенства следует, что точка  $H$  является серединой отрезка  $DM$ , т.е. точка  $H$  лежит на  $DH_1$  тетраэдра.

Аналогично строится точка  $N$ :  $\vec{ON} = \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OD}$  и та же точка  $H$ :  $\vec{OH} = \frac{1}{2}(\vec{ON} + \vec{OC})$  и доказывается, что точка  $H$  лежит на высоте тетраэдра, проведенной из вершины  $C$ , и т.д.

Следовательно, высоты ортоцентрического тетраэдра пересекаются в одной точке  $H$ , определяемой соотношением (5).

### Прямая Эйлера тетраэдра

**Теорема 6.** *Центр  $O$  описанной сферы, центроид  $G$  и ортоцентр  $H$  ортоцентрического тетраэдра  $ABCD$  лежат на одной прямой, причем точки  $O$  и  $H$  симметричны относительно точки  $G$ .*

**Доказательство.** По формулам (4) и (5)

$$\vec{OH} = \frac{1}{2}\left(\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OD}\right),$$

$$\vec{OG} = \frac{1}{4}\left(\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OD}\right),$$

откуда  $\vec{OH} = 2\vec{OG}$ . Полученное равенство означает, что точки  $O, G, H$  лежат на одной прямой, причем точки  $O$  и  $H$  симметричны относительно точки  $G$ .

Прямую, на которой лежат точки  $O, G, H$ , можно назвать *прямой Эйлера ортоцентрического тетраэдра*.

### Упражнения

Решите с помощью скалярного произведения векторов задачи 1 — 4.

1. а) Докажите, что если  $O$  — центр окружности, описанной около треугольника  $ABC$ , и  $\vec{OH} = \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}$ , то  $H$  — точка пересечения высот треугольника.

б) Докажите, что если  $O$  — центр сферы, описанной около ортоцентрического тетраэдра  $ABCD$ , и  $\vec{OH} = \frac{1}{2}(\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OD})$ , то  $H$  — точка пересечения четырех высот тетраэдра.

2. Докажите, что если  $A, B, C$  и  $D$  — четыре произвольные точки пространства, то  $\vec{AB} \cdot \vec{CD} + \vec{BC} \cdot \vec{AD} + \vec{CA} \cdot \vec{BD} = 0$ .

Пользуясь этим равенством, докажите, что

а) три высоты треугольника пересекаются в одной точке;

б) если противоположные ребра  $AB$  и  $CD$ ,  $AD$  и  $BC$  тетраэдра  $ABCD$  перпендикулярны, то ребра  $CA$  и  $BD$  также перпендикулярны.

3. Докажите, что если  $A, B, C, D$  — четыре произвольные точки пространства, то  $AB^2 + CD^2 - AD^2 - BC^2 = 2\vec{AC} \cdot \vec{DB}$ .

Пользуясь этим равенством, докажите, что

а) сумма квадратов диагоналей трапеции равна сумме квадратов ее боковых сторон, сложенной с удвоенным произведением оснований;

б) диагонали четырехугольника перпендикулярны тогда и только тогда, когда суммы квадратов противоположных сторон равны;

в) для того чтобы тетраэдр был ортоцентрическим, необходимо и достаточно, чтобы суммы квадратов его противоположных ребер были равны.

4. Докажите, что все плоские углы при одной вершине ортоцентрического тетраэдра либо одновременно острые, либо прямые, либо тупые и хотя бы одна его грань является остроугольным треугольником.

5. а) Докажите, что точки, симметричные ортоцентру  $H$  треугольника  $ABC$  относительно середин его сторон, а также точки, симметричные ортоцентру  $H$  относительно прямых  $BC$ ,  $CA$  и  $AB$ , лежат на окружности, описанной около этого треугольника.

б) Пусть  $H$  — ортоцентр тетраэдра  $ABCD$ ,  $G_1$  и  $H_1$  — соответственно центроид и ортоцентр грани  $ABC$ , а  $G_2$  и  $H_2$  — такие точки, что  $H\vec{G}_2 = 3H\vec{G}_1$  и  $H\vec{H}_2 = 3H\vec{H}_1$ . Докажите, что точки  $G_2$  и  $H_2$  лежат на сфере, описанной около этого тетраэдра.

6. а) Докажите, что середины трех сторон, основания трех высот треугольника и середины отрезков, соединяющих ортоцентр с тремя вершинами, лежат на одной окружности, а центр этой окружности (называемой *окружностью десяти точек*) лежит на прямой Эйлера.

б) Докажите, что центроиды четырех граней, основания четырех высот ортоцентрического тетраэдра и точки, которые делят каждый из отрезков, соединяющих ортоцентр с вершинами, в отношении 1 : 2 (считая от ортоцентра), лежат на одной сфере, а центр этой сферы (называемой *сферой двенадцати точек*) расположен на прямой Эйлера.

7. Докажите, что

а) если основание одной из высот тетраэдра есть ортоцентр соответствующей грани, то тетраэдр является ортоцентрическим;

б) основание любой из высот ортоцентрического тетраэдра есть ортоцентр соответствующей грани (эти свойства использованы при доказательстве теоремы 5).

# ОКРУЖНОСТЬ ДЕВЯТИ ТОЧЕК И ПРЯМАЯ ЭЙЛЕРА

И.Шарыгин, А.Ягубьянц

Самый простой из многоугольников — треугольник — издавна привлекает внимание геометров. После Евклида красивые теоремы доказывали о нем такие замечательные ученые древности, как Аполлоний, Герон, Менелай и Птолемей. Ближе к нашему времени треугольником увлекались Эйлер, Понселе, Симсон, Дезарг, Клейн, Адамар.

В наши дни треугольник немного вышел из моды, но не утратил своей былой красоты. В этом вы сможете убедиться, прочитав про связанные с треугольником окружность и прямую, носящие имя Леонарда Эйлера. А рассмотренные затем задачи, мы надеемся, покажут, что вокруг треугольника еще есть над чем подумать.

## Окружность Эйлера

Начнем со следующей замечательной теоремы, опубликованной Эйлером в 1765 году:

*Основания высот, основания медиан и точки, расположенные на серединах отрезков от ортоцентра<sup>1</sup> до вершин треугольника, лежат на одной окружности.*

Окружность эта получила название *окружности девяти точек* или *окружности Эйлера* (рис.1).

Прежде чем приступить к доказательству этой теоремы, обратим внимание на несколько простых, но полезных фактов, связанных с геометрией треугольника (рекомендуем доказать их самостоятельно).

Пусть  $O$  — центр окружности, описанной около треугольника

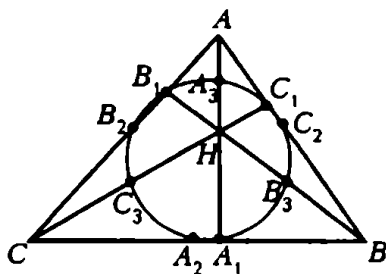


Рис. 1

<sup>1</sup> Ортоцентр — точка пересечения высот.



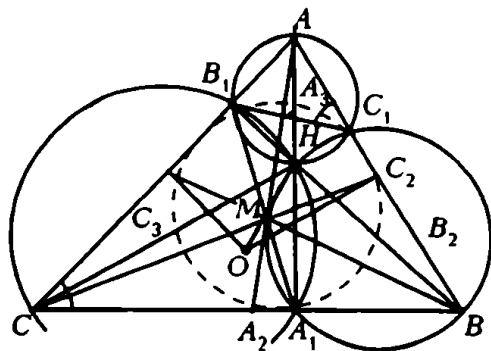


Рис. 2

$ABC$ ,  $M$  — точка пересечения его медиан (остальные обозначения см. на рисунке 1).

(1) Точки  $A_3$ ,  $B_3$ ,  $C_3$  являются центрами окружностей, описанных, соответственно, около треугольников  $AB_1C_1$ ,  $A_1BC_1$ ,  $A_1B_1C$ . (Указание.  $AH$ ,  $BH$ ,  $CH$  — диаметры этих окружностей — см. рис.2.)

(2) Треугольники  $AB_1C_1$ ,  $A_1BC_1$ ,  $A_1B_1C$  подобны между собой и подобны исходному треугольнику  $ABC$ . (Указание. Соответственные вершины обозначены одинаковыми буквами;  $\angle ABC = \angle AHC_1 = \angle AB_1C_1$ .)

(3) Пусть  $A$ ,  $B$  и  $C$  — величины соответствующих углов треугольника  $ABC$ . Если эти углы — острые, то величины углов треугольника  $A_1B_1C_1$  равны, соответственно,  $180^\circ - 2A$ ,  $180^\circ - 2B$ ,  $180^\circ - 2C$ , если же, например,  $A > 90^\circ$ , то они равны  $2A - 180^\circ$ ,  $2B$ ,  $2C$  (рис.2).

(4) Расстояние от точки  $O$  до каждой стороны треугольника вдвое меньше, чем расстояние от противоположной вершины до ортоцентра:

$$A_2O = \frac{1}{2} AH, \quad B_2O = \frac{1}{2} BH, \quad C_2O = \frac{1}{2} CH.$$

(Указание. Рассмотрите треугольник, стороны которого проходят через точки  $A$ ,  $B$ ,  $C$  параллельно  $BC$ ,  $AC$ ,  $AB$  соответственно.)

### Прямая Эйлера

Заметим, что из утверждения (4) сразу следует, что точки  $O$ ,  $M$  и  $H$  лежат на одной прямой, поскольку прямая  $OH$  делит медиану  $AA_2$  в том же отношении, что и точка  $M$ . Эта прямая носит название *прямой Эйлера* треугольника  $ABC$ . Легко видеть, что  $OM = \frac{1}{2} MH$ .

Докажем теперь, что точки  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$ ,  $A_2$ ,  $B_2$ ,  $C_2$ ,  $A_3$ ,  $B_3$ ,  $C_3$  лежат на одной окружности. Ограничимся рассмотрением случая остроугольного треугольника  $ABC$ . (Для тупоугольного треугольника проведите рассуждения самостоятельно.)

Сначала заметим, что точки  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $B_2$ ,  $C_2$  лежат на одной окружности (рис.3), поскольку  $B_2A_1$  и  $C_2A_1$  — медианы прямо-

## Свойства прямой и окружности Эйлера

33

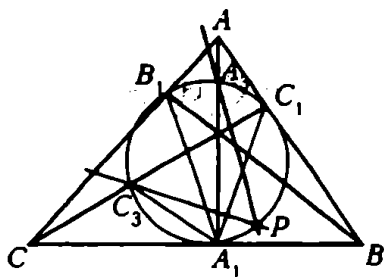


Рис. 5

из отрезков  $PA_1$ ,  $PB_1$ ,  $PC_1$  равен сумме двух других отрезков (рис. 5).

Пусть, как и прежде,  $H$  — ортоцентр треугольника  $ABC$ .  $A_3$ ,  $B_3$ ,  $C_3$  — середины отрезков  $AH$ ,  $BH$ ,  $CH$  (они, напомним, являются центрами окружностей, описанных около подобных треугольников  $AB_1C_1$ ,  $A_1BC_1$ ,  $A_1B_1C$ ).

Докажем сначала вспомогательное утверждение. Если через точки  $A_3$ ,  $B_3$ ,  $C_3$  провести прямые, одинаково расположенные<sup>2</sup> по отношению к треугольникам  $AB_1C_1$ ,  $A_1BC_1$ ,  $A_1B_1C$ , то такие прямые пересекутся на окружности девяти точек треугольника  $ABC$ . Обозначим через  $P$  точку пересечения каких-нибудь двух из этих прямых, например, прямых, проведенных через  $A_3$  и  $C_3$  (рис. 6). Так как прямые  $A_3P$  и  $C_3P$  одинаково расположены относительно треугольников  $AB_1C_1$  и  $A_1B_1C$ ,  $\angle A_3A_1P = \angle A_1C_3P$ . Значит, окружность, проходящая через точки  $P_1$ ,  $A_1$ ,  $C_3$ , пройдет через

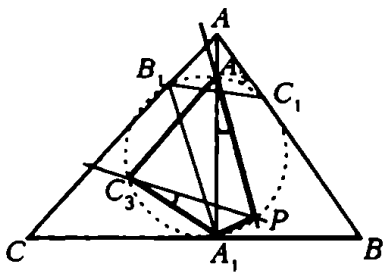


Рис. 6

точку  $A_3$ . Но тогда эта окружность — окружность девяти точек треугольника  $ABC$ . Таким образом, любые две из проведенных прямых пересекаются на окружности девяти точек треугольника  $ABC$ , отсюда легко заключить, что все три прямые пересекаются в одной точке.

Для завершения доказательства предположим теперь, что  $P$  — точка пересечения прямых Эйлера. Легко видеть (проверьте!), что числа  $PA_1$ ,  $PB_1$ ,  $PC_1$  пропорциональны синусам углов  $\angle PA_3A_1$ ,  $\angle PA_3B_1$ ,  $\angle PA_3C_1$ . Положим  $\angle PA_3A_1 = \varphi$ .

Предположим, что  $\triangle ABC$  — остроугольный. Пользуясь свойством (3) и рисунком 5, найдем

$$\angle PA_3B_1 = \varphi + \angle A_4A_3B_1 = \varphi + \angle A_1C_1B_1 = \varphi + 180^\circ - 2C,$$

$$\angle PA_3C_1 = \angle A_1A_3C_1 - \varphi = \angle A_1B_1C_1 - \varphi = 180^\circ - 2B - \varphi.$$

<sup>2</sup> Т.е. образующие с соответствующими сторонами одинаковые углы.

книге «Избранные задачи из журнала American Mathematical Monthly» (М., «Мир», 1977):

Дан треугольник  $ABC$ ;  $AA_1$ ,  $BB_1$ ,  $CC_1$  — его высоты. Докажите, что прямые Эйлера треугольников  $AB_1C_1$ ,  $A_1BC_1$ ,  $A_1B_1C$  пересекаются в такой точке  $P$  окружности девяти точек треугольника  $ABC$ , для которой один

Таким образом, нам нужно доказать, что одно из трех чисел

$$\sin \varphi, \sin(2C - \varphi), \sin(2B + \varphi)$$

(в данном случае — второе) является суммой двух других.

Рассмотрим треугольник  $AOH$  (рис.7). Поскольку  $\triangle ABC \sim \triangle AB_1C_1$  и точки  $O, A_3$  являются центрами описанных около этих треугольников окружностей,  $\angle AOH = \varphi$  и  $\angle OAC = \angle HAB = 90^\circ - B$ . Значит,

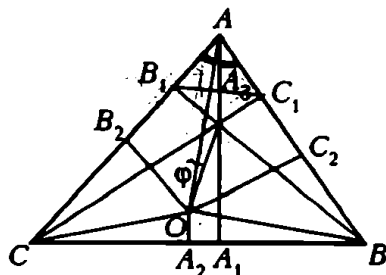


Рис. 7

$$\angle OAH = A - \angle OAC = \angle A_1AB = A - (90^\circ - B) - (90^\circ - B) = 2B + A - 180^\circ,$$

откуда

$$\sin \angle OHA = \sin(360^\circ - 2B - A - \varphi) = -\sin(2B + A + \varphi).$$

Если  $R$  — радиус окружности, описанной около  $\triangle ABC$ , то  $OA = R$ ; в силу свойства (4) и равенства  $\angle A_2OB = \frac{1}{2} \angle COB = A$  имеем

$$AH = 2OA_2 = 2R \cos A.$$

По теореме синусов для треугольника  $OA H$  получаем

$$\frac{R}{-\sin(2B + A + \varphi)} = \frac{2R \cos A}{\sin \varphi},$$

$$-\sin \varphi = 2 \cos A \sin(2B + A + \varphi),$$

$$-\sin \varphi = \sin(2A + 2B + \varphi) + \sin(2B + \varphi),$$

$$-\sin \varphi = \sin(2C - \varphi) + \sin(2B + \varphi),$$

$$\sin(2C - \varphi) = \sin \varphi + \sin(2B + \varphi).$$

Попробуйте самостоятельно проделать доказательство в случае, когда треугольник  $ABC$  — тупоугольный.

В заключение приведем без доказательства еще один замечательный факт, связанный с окружностью девяти точек:

**Теорема Фейербаха.** Окружность девяти точек касается вписанной и трех внеписанных окружностей<sup>3</sup> данного треугольника.

Все известные нам доказательства этого утверждения весьма громоздки и носят, по существу, чисто вычислительный характер.

<sup>3</sup> Внеписанная окружность — это окружность, касающаяся одной стороны треугольника и продолжений двух других его сторон.

тер. Возможно, вам удастся найти хорошее геометрическое доказательство теоремы Фейербаха.

### Упражнения

1. Пусть  $H$  — ортоцентр треугольника  $ABC$ . Докажите, что треугольники  $ABC$ ,  $ABH$ ,  $BCH$ ,  $CAH$  имеют одну и ту же окружность девяти точек.

2. Пусть  $K$  — середина какой-либо стороны треугольника,  $H$  — ортоцентр,  $L$  — точка пересечения прямой  $HK$  с окружностью, описанной около треугольника ( $K$  между  $H$  и  $L$ ). Докажите, что  $HK = KL$ .

3. Пусть  $P$  — основание высоты треугольника,  $M$  — точка пересечения медиан,  $N$  — точка пересечения прямой  $MP$  с описанной окружностью ( $M$  между  $P$  и  $N$ ). Докажите, что  $2PM = MN$ .

4. Докажите, что основания перпендикуляров, опущенных из произвольной точки описанной окружности на стороны треугольника, лежат на одной прямой. Эта прямая называется *прямой Симсона*. Докажите, что прямые Симсона, соответствующие концам диаметра, взаимно перпендикулярны, а их точка пересечения лежит на окружности девяти точек.

5. Внутри треугольника  $ABC$  дана точка  $M$ . Докажите, что прямые Эйлера треугольников  $AMB$ ,  $BMC$  и  $CMA$  пересекаются в одной точке, если

а)  $M$  — ортоцентр треугольника  $ABC$ ;

б)  $M$  — точка, из которой все стороны треугольника видны под углом  $120^\circ$  (все углы треугольника меньше  $120^\circ$ ).

6. Пусть  $L$  — такая точка в плоскости треугольника  $ABC$ , что  $AL : BL : CL = BC : CA : AB$ . Докажите, что  $L$  лежит на прямой Эйлера треугольника  $ABC$ .

Желающим поближе ознакомиться с геометрией треугольника мы рекомендуем две книги:

*С.И.Зетель*. «Новая геометрия треугольника» (М., «Учпедгиз», 1962).

*С.М.Коксетер, С.Л.Грейтцер* «Новые встречи с геометрией» (М., «Мир», 1978).

# ТОЧКИ БРОКАРА

В.Прасолов

С каждым треугольником связано много замечательных точек: точка пересечения медиан, точка пересечения высот, центры описанной и вписанной окружностей. Есть и другие замечательные точки. Мы расскажем о двух из них — о точках Брокара.

Точка  $P$ , лежащая внутри треугольника  $ABC$ , называется первой точкой Брокара, если

$$\angle PAC = \angle PCB = \angle PBA$$

(рис.1,а). Для второй точки Брокара должны выполняться равенства  $\angle QAB = \angle QBC = \angle QCA$  (рис.1, б).

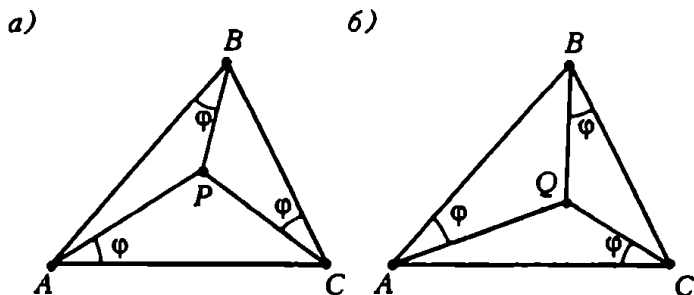


Рис. 1

Прежде чем рассказывать о свойствах этих точек, докажем, что для любого треугольника существует ровно одна первая точка Брокара, а также ровно одна вторая точка Брокара. Начнем с первой из них. Построим на сторонах треугольника  $ABC$  подобные ему треугольники  $A_1BC$ ,  $AB_1C$  и  $ABC_1$ , как показано на рисунке 2. Так как  $\angle PCB = \angle C - \angle PCA$ , то равенства  $\angle PAC = \angle PCB$  и  $\angle PAC = \angle C - \angle PCA$  эквивалентны. Последнее равенство можно переписать в виде  $\angle C = \angle PAC + \angle PCA = 180^\circ - \angle APC$ . Для точки  $P$ , лежащей внутри треугольника  $ABC$ , это равенство равносильно тому, что она лежит на окружности, описанной около треугольника  $AB_1C$ . Аналогичные

рассуждения для остальных углов показывают, что  $P$  — точка Брокера тогда и только тогда, когда она принадлежит описанным окружностям всех трех треугольников  $A_1BC$ ,  $AB_1C$  и  $ABC_1$ . Пусть  $P_1$  — точка пересечения описанных окружностей треугольников  $A_1BC$  и  $AB_1C$ , отличная от точки  $C$ . Тогда

$$\angle AP_1B = 360^\circ - \angle P_1CB - \angle CP_1B = \gamma + \beta = 180^\circ - \angle AC_1B,$$

а значит, точка  $P_1$  лежит и на описанной окружности треугольника  $ABC_1$ , т.е.  $P_1 = P$  — точка Брокера. Соединим ее со всеми

вершинами рассматриваемых треугольников. Из равенства вписанных углов, опирающихся на одну дугу, следует, что углы между полученными отрезками именно такие, как указано на рисунке 2. А так как  $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$ , отрезки  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$  проходят через точку  $P$ .

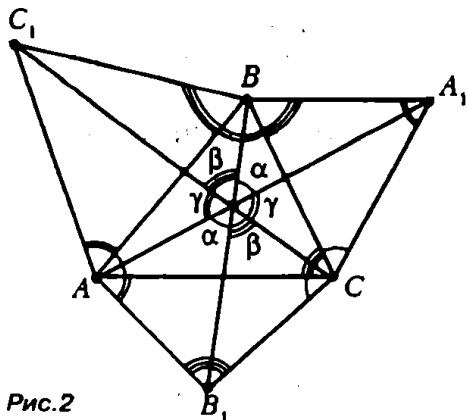


Рис. 2

**Задача 1.** Постройте на сторонах треугольника  $ABC$  подобные ему треугольники  $A_1BC$ ,  $AB_1C$  и  $ABC_1$ , так, чтобы отрезки  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$  пересекались во второй точке Брокера.

Итак, мы доказали, что для любого треугольника существует первая точка Брокера, причем ровно одна. Теперь можно начать обсуждать свойства точек Брокера. Если через центр  $O$  описанной окружности треугольника  $ABC$  провести прямые  $AO$ ,  $BO$  и  $CO$ , то они пересекут окружность в таких точках  $A_1$ ,  $B_1$  и  $C_1$ , что треугольники  $A_1B_1C_1$  и  $ABC$  равны (они симметричны относительно точки  $O$ ). Точка Брокера обладает похожим свойством.

**Задача 2.** а) Пусть  $P$  — первая точка Брокера. Прямые  $AP$ ,  $BP$  и  $CP$  пересекают описанную окружность треугольника  $ABC$  в точках  $A_1$ ,  $B_1$  и  $C_1$ . Докажите, что  $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$ .

б) Сформулируйте и докажите аналогичное утверждение для второй точки Брокера.

Если из центра  $O$  описанной окружности треугольника  $ABC$  опустить перпендикуляры  $OA'$ ,  $OB'$  и  $OC'$  на его стороны, то точки  $A'$ ,  $B'$  и  $C'$  будут серединами сторон треугольника  $ABC$ , поэтому  $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ . Точка Брокера  $P$  снова обладает похожим свойством.

**Задача 3.** Из первой точки Брокера  $P$  опущены перпендикуляры  $PA'$ ,  $PB'$  и  $PC'$  на стороны треугольника  $ABC$ . Докажите, что  $\triangle ABC \sim \triangle B'S'A'$ .

В некотором смысле задача 3 после задачи 2 уже излишняя. Дело в том, что справедливо следующее утверждение.

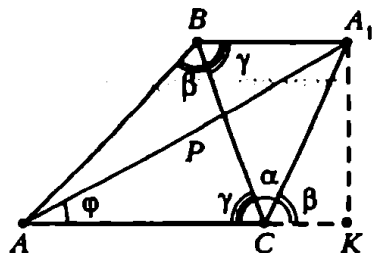


Рис.3

**Задача 4.** Прямые  $AX$ ,  $BX$  и  $CX$  пересекают описанную окружность треугольника  $ABC$  в точках  $A_1$ ,  $B_1$  и  $C_1$ ;  $A'$ ,  $B'$  и  $C'$  — проекции точки  $X$  на стороны треугольника  $ABC$ . Докажите, что  $\triangle A_1B_1C_1 \sim \triangle A'B'C'$ .

Обратимся теперь к углу  $\varphi = \angle PAC = \angle PCB = \angle PBA$ . Его можно выразить через углы треугольника  $ABC$ . Сотрем для этого на рисунке 2 все лишнее (см. рис.3) и опустим из точки  $A_1$  перпендикуляр  $A_1K$  на прямую  $AC$ . Тогда

$$\operatorname{ctg} \varphi = AK/A_1K = AC/A_1K + CK/A_1K = (\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \gamma) + \operatorname{ctg} \beta.$$

Для второй точки Брокера мы получим точно такое же выражение. Углы, заключенные между  $0^\circ$  и  $180^\circ$ , равны тогда и только тогда, когда равны их котангенсы. Поэтому для второй точки Брокера мы получим тот же самый угол  $\varphi$ ; он называется *углом Брокера*.

**Задача 5.** а) Докажите, что угол Брокера  $\varphi \leq 30^\circ$ .

б) Внутри треугольника  $ABC$  взята точка  $M$ . Докажите, что один из углов  $ABM$ ,  $BCM$  и  $CAM$  не превосходит  $30^\circ$ .

Обсудим более подробно совпадение углов для первой и второй точек Брокера. Пусть  $P$  и  $Q$  — эти точки. Отразим прямые  $AP$ ,  $BP$  и  $CP$  относительно биссектрис углов  $A$ ,  $B$  и  $C$  соответственно. Тогда полученные прямые пересекутся в точке  $Q$ . Впрочем, в этом отношении точки Брокера не исключение: для любой точки  $X$ , не лежащей на описанной окружности треугольника  $ABC$ , при отражении прямых  $AX$ ,  $BX$  и  $CX$  относительно биссектрис соответствующих углов получаются прямые, пересекающиеся в одной точке. Мы не будем обсуждать подробно этот замечательный факт — это тема для отдельного разговора. Отметим лишь следующее.

**Задача 6.** Пусть  $O$  — центр описанной окружности треугольника  $ABC$ . Докажите, что прямые, симметричные прямым  $AO$ ,  $BO$  и  $CO$  относительно биссектрис углов  $A$ ,  $B$  и  $C$  соответственно, проходят через точку пересечения высот треугольника  $ABC$ .



Предлагаем вам решить еще несколько задач о свойствах точек и углов Брокара.

### Задачи

7. Пусть  $P$  — точка Брокара треугольника  $ABC$ ;  $R_1$ ,  $R_2$  и  $R_3$  — радиусы описанных окружностей треугольников  $ABP$ ,  $BCP$  и  $CAP$ . Докажите, что  $R_1 R_2 R_3 = R^3$ , где  $R$  — радиус описанной окружности треугольника  $ABC$ .

8. Пусть  $Q$  — вторая точка Брокара треугольника  $ABC$ ;  $O$  — центр его описанной окружности;  $A_1$ ,  $B_1$  и  $C_1$  — центры описанных окружностей треугольников  $CAQ$ ,  $ABQ$  и  $BCQ$ . Докажите, что  $\triangle A_1 B_1 C_1 \sim \triangle ABC$ , причем  $O$  — первая точка Брокара треугольника  $A_1 B_1 C_1$ .

9. Докажите, что из медиан треугольника  $ABC$  можно составить некоторый треугольник  $A_1 B_1 C_1$ , причем углы Брокара обоих треугольников равны.

10. Дан правильный треугольник  $ABC$  с центром  $O$ . Докажите, что угол Брокара треугольника, образованного проекциями точки  $X$  на стороны треугольника  $ABC$ , зависит лишь от длины отрезка  $OX$ .

В первой половине прошлого века немецкий математик К.Фейербах доказал одну из самых красивых теорем планиметрии. Об этой теореме и других связанных с ней вещах и пойдет речь в этой статье.

## Окружность девяти точек

Пусть дан треугольника  $ABC$ ,  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$  — середины его сторон. Треугольник  $A'B'C'$  мы будем называть *срединным* треугольником треугольника  $ABC$ . Опишем около треугольника  $A'B'C'$  окружность  $\gamma$  — *окружность Эйлера* треугольника  $ABC$ . (Дальше мы будем говорить «окружность  $XYZ$ », имея в виду окружность, проходящую через три данные точки  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$ .) Начнем с совсем простых утверждений (необходимые обозначения см. на рис.1).

**Упражнение 1.** Докажите, что:

а) Центр описанной около треугольника окружности совпадает с точкой пересечения высот его срединного треугольника.

б) Радиус окружности  $\gamma$  равен половине радиуса окружности  $ABC$ .

в) Центроиды (точки пересечения медиан) треугольников  $ABC$  и  $A'B'C'$  совпадают, а треугольники  $ABC$  и  $A'B'C'$  гомотетичны с коэффициентом  $-2$  относительно их общего центроида  $M$ .

г)\* (*теорема Эйлера*) Для всякого треугольника  $ABC$  его ортоцентр  $H$ , центр  $O$  окружности  $ABC$  и центроид  $M$  лежат на одной прямой (*прямая Эйлера*), причем  $2OM = MH$ .

д) Центр окружности Эйлера треугольника  $ABC$  совпадает с серединой отрезка  $OH$ .

**Указание.** Перпендикуляр к отрезку  $A'C'$  в точке  $B''$  пересекает прямую  $OH$  в точке  $O'$ , для которой  $OM/MO' = B'M/BV'' = 2/1$  ( $B''M = 1/2 BV''$ ).

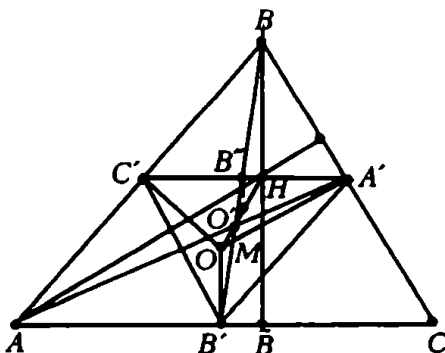


Рис.1

Аналогично, и остальные срединные перпендикуляры треугольника  $A'B'C'$  также проходят через точку  $O'$ .

Прочему же окружность Эйлера называется еще и окружностью девяти точек? Объяснение дает следующая теорема, известная еще Эйлеру.

**Теорема 1.** Пусть  $\gamma$  — окружность Эйлера треугольника  $ABC$ . Тогда кроме середин сторон ей принадлежат следующие 6 точек: основания высот этого треугольника и середины отрезков, соединяющих его вершины с ортоцентром.

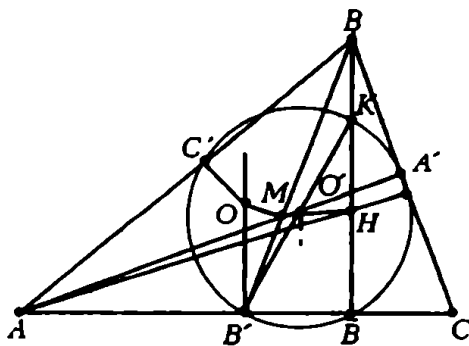


Рис. 2

Вы получите доказательство этой теоремы, решив следующее упражнение.

**Упражнение 2.** Докажите, что (рис. 2) если  $\bar{B}$  — основание высоты, опущенной из вершины  $B$ , а прямая  $H'O'$  пересекает  $B\bar{B}$  в точке  $K$ , то  $BK = KH = B'O$ ,  $H'O' = O'K$  (воспользуйтесь упражнениями 1, в), г)).

Из результата упражнения 2 следует, что  $B'K$  — диаметр окружности Эйлера, т.е. что точки  $\bar{B}$  и  $K$  ей принадлежат, а это и доказывает теорему.

Свойства окружности девяти точек, составляющие содержание упражнения 1 и 2, нам в дальнейшем не понадобятся. Но мы все-таки советуем вам решить эти упражнения, чтобы поближе познакомиться с объектом, более глубокие свойства которого нам предстоит обнаружить.

### Формулировка теоремы Фейербаха

Напомним, что вневписанной окружностью треугольника  $ABC$ , соответствующей стороне  $AB$  (или — вершине  $C$ ), называется окружность, касающаяся стороны  $AB$  и продолжений сторон  $AC$  и  $BC$ . Легко видеть, что у любого треугольника существует ровно три вневписанные окружности. При этом центр вневписанной окружности треугольника  $ABC$ , соответствующей вершине  $C$ , — это точка пересечения биссектрисы угла  $C$  и внешних углов  $A$  и  $B$  треугольника  $ABC$  (докажите это самостоятельно).

Таким образом, если три прямые образуют треугольник, то существуют ровно четыре окружности, каждая из которых

касается всех трех прямых (рис. 3).

Теперь мы можем сформулировать теорему, составляющую основное содержание этой статьи.

**Теорема Фейербаха.** *Окружность девяти точек касается вписанной и всех внеписанных окружностей данного треугольника.*

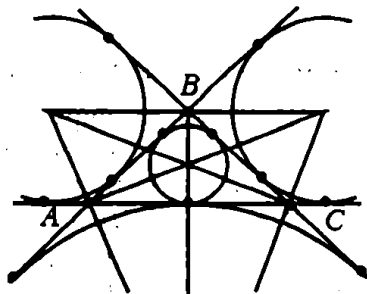


Рис. 3

Дальше мы увидим, что на самом деле окружность Эйлера касается не только вписанной и внеписанных окружностей, а еще целых 60-ти (!) окружностей, связанных с данным треугольником. Но для этого нам предстоит провести некую предварительную подготовку.

### Ориентированные углы и теорема о сегменте

Для облегчения в дальнейшем формулировок договоримся о некоторых терминах.

**Определение 1.** Углом между пересекающимися в точке  $O$  различными прямыми  $a$  и  $b$  мы будем называть угол, на который необходимо повернуть прямую  $a$  вокруг точки  $O$  против часовой стрелки до совпадения с прямой  $b$  (в литературе подобному определению часто соответствует термин «ориентированный угол»). На рисунке 4,  $\alpha$  — угол между  $a$  и  $b$ ,  $\beta$  — угол между  $b$  и  $a$  (очевидно,  $\alpha + \beta = \pi$ ). Такое понимание угла

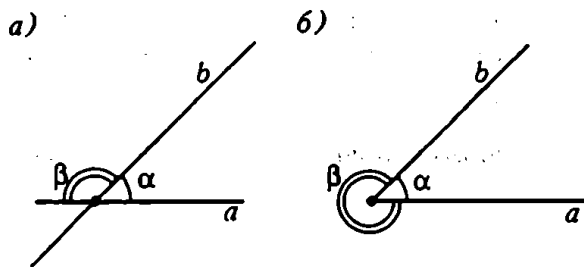


Рис. 4

позволит нам понимать без специальных оговорок, какой из двух смежных углов рассматривается в каждом конкретном случае. Аналогично определяется угол между лучами  $a$  и  $b$ , выходящими из одной точки. На рисунке 4,  $\alpha$  — угол между лучами  $a$  и  $b$ ,  $\beta$  — между  $b$  и  $a$  (здесь  $\alpha + \beta = 2\pi$ ).

**Определение 2.** Дугой  $AB$  данной окружности мы будем называть дугу, пробегаемую точкой при движении по этой

окружности против часовой стрелки от  $A$  к  $B$ . При таком определении ясно, какую из двух дуг, на которые точки  $A$  и  $B$  разбивают окружность, надо считать дугой  $\overset{\curvearrowleft}{AB}$ . Ясно, что дуги  $\overset{\curvearrowleft}{AB}$  и  $\overset{\curvearrowright}{BA}$  составляют всю окружность.

Наконец, напомним, что *угловой мерой дуги  $\overset{\curvearrowleft}{AB}$  данной окружности называется угол между лучами  $OA$  и  $OB$ , где  $O$  — центр окружности, а угловой мерой дуги  $\overset{\curvearrowright}{BA}$  — угол между лучами  $OB$  и  $OA$* . Таким образом,  $\overset{\curvearrowleft}{AB} + \overset{\curvearrowright}{BA} = 2\pi$ .

Сформулируем теперь очень важное для дальнейшего и интересное само по себе утверждение.

**Теорема 2 (теорема о сегменте).** В угол, образованный прямыми  $a$  и  $b$  (см. рис. 5 — 8) вписана окружность  $\gamma$  с центром  $I$ . На прямых  $a$  и  $b$  выбираются произвольные точки  $A$  и  $B$  так, что (см. рис. 5 — 7) прямая  $AB$  касается окружности  $\gamma$ , а через точки  $A$  и  $B$  проводится окружность  $\omega$ , для которой  $\overset{\curvearrowleft}{AB} = \varphi$ , где  $0 < \varphi < 2\pi$  — данное фиксированное число. Тогда существуют две постоянные окружности, касающиеся прямых  $AO$  и  $OB$  и окружности  $\omega$ .

Одна из этих окружностей касается этих прямых в точках  $N_a$  и  $N_b$ , вторая — в точках  $M_a$  и  $M_b$  таких, что  $\angle AN_aI = \varphi/4$ ,

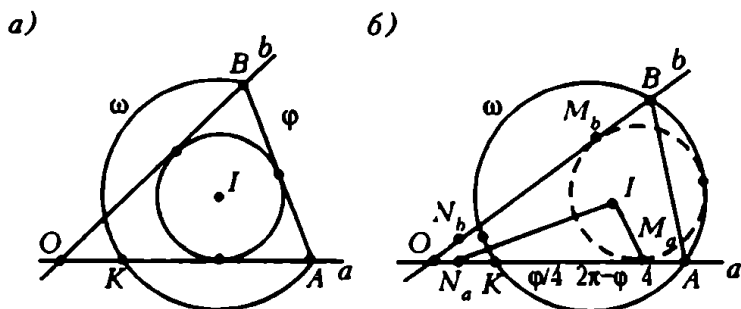


Рис. 5

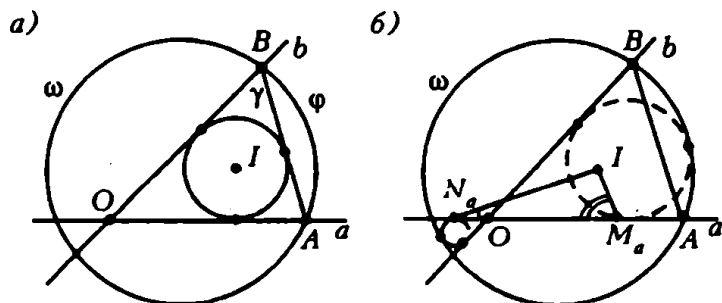


Рис. 6

а)

б)

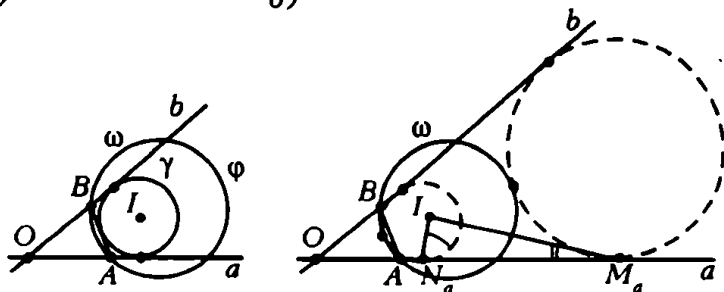


Рис. 7

а)

б)

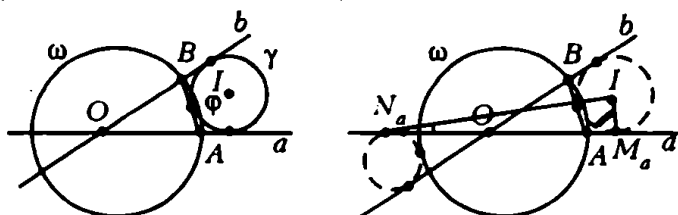


Рис. 8

$a \angle IM_aO = (2\pi - \varphi)/4$  (таким образом, треугольник  $N_aIM_a$  — прямоугольный).

Конечно, сразу разобраться в столь длинной формулировке не просто. Для наглядности представим себе, что точки  $A$  и  $B$  движутся по лучам  $OA$  и  $OB$  так, что окружность  $\gamma$  все время остается вписанной в треугольник  $AOB$  (см. рис.5, а)). На стороне  $AUB$  во внешнюю сторону треугольника  $AOB$  строится дуга окружности, равная  $\varphi$  (эта дуга вместе с отрезком  $AB$  ограничивает выделенный сегмент, см. рис.9). Тогда переменная окружность  $\omega$ , содержащая дугу  $\varphi$ , будет касаться двух фиксированных окружностей, показанных на рисунках 5 — 9 штриховой линией.

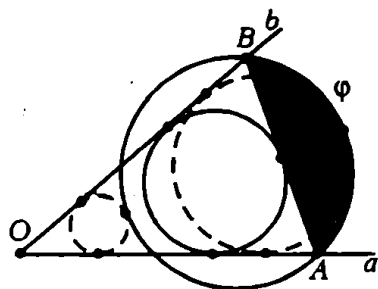


Рис. 9

Рисунок 9 — это один из случаев реализации теоремы о сегменте. Другая возможность представлена на рисунках 6, а, б. Здесь угол  $\varphi$  мал (точнее,  $\frac{\varphi}{2} < \angle AOB$ ), и точка  $N_a$  «ушла» на продолжение луча  $AO$  за точку  $O$  (почему?), так что окруж-

ность, касающаяся прямой  $A$  в точке  $N_a$ , вписана уже не в угол  $AOB$ , а в вертикальный с ним.

Наконец, окружность  $\gamma$  может быть не только вписанной, но и вневписанной для треугольника  $AOB$ . Эта ситуация порождает еще два случая (рис.7 и 8).

Определения угла и дуги, данные выше, позволили свести все случаи в единую формулировку теоремы о сегменте. Приняв пока теорему о сегменте как факт, без доказательства, получим некоторые ее следствия.

### Упражнения

3. Докажите, что прямая  $BK$  параллельна касательной к окружности  $\gamma$ , проведенной из точки  $N_a$  (рис.5, 6).

4. а) По сторонам угла  $O$  движутся точки  $A$  и  $B$ , так что треугольник  $AOB$  имеет постоянную вписанную окружность  $\gamma$ . Докажите, что его описанная окружность все время касается фиксированной окружности, вписанной в угол  $AOB$ , причем точки касания последней со сторонами угла и центр окружности  $\gamma$  лежат на одной прямой.

б) Докажите утверждение а), если  $\gamma$  — постоянная вневписанная окружность треугольника  $AOB$ , соответствующая вершине  $O$ .

5. а) Докажите, что окружность, вписанная в прямой угол  $C$  треугольника  $ABC$  и касающаяся изнутри его описанной окружности, гомотетична вписанной окружности треугольника  $ABC$  относительно точки  $C$  с коэффициентом  $2 : 1$ .

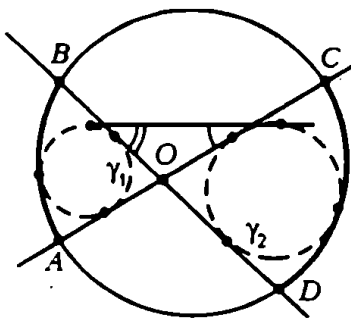


Рис. 10

б) Докажите, что окружность, вписанная в прямой угол  $C$  треугольника  $ABC$  и касающаяся внешним образом его описанной окружности, гомотетична относительно точки  $C$  с коэффициентом  $2 : 1$  его вписанной окружности.

в) Докажите теорему Фейербаха для прямоугольного треугольника.

6. Даны непересекающиеся окружности  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$ . Произвольная окружность касается  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  внутренним образом и пересекает их общие внутренние касательные в точках  $A, B, C, D$  (рис.10). Докажите, что

а) угловые меры дуг  $\widehat{AB}$  и  $\widehat{CD}$  постоянны и равны удвоенным углам, образованным прямыми  $AC$  и  $BD$  с общей внешней касательной к  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$ ;

б) у треугольников  $AOB$  и  $COD$  постоянные вписанные окружности.

7. Предыдущее упражнение есть не что иное, как утверждение, обратное случаю теоремы о сегменте, показанному на рисунке 6. Сформулируйте и докажите аналогичные утверждения, соответствующие случаям, показанным на рисунках 7 и 8.

8. Даны окружности  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$ , касающиеся внешним образом в точке  $O$ . Окружность  $\omega$  касается их одинаковым образом (внутренним или внешним). Докажите, что общая касательная к  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$ , проведенная в точке  $O$ , делит окружность  $\omega$  на две дуги, равные удвоенным углам между этой касательной и другой общей касательной к  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$ .

9 (задача о луночке). Дан угол с вершиной в точке  $O$  и два числа  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  такие, что  $0 < \varphi_1 < 2\pi$ ,  $0 < \varphi_2 < 2\pi$ . Точки  $A$  и  $B$  движутся по сторонам угла, и на стороне  $AB$  во внешнюю сторону треугольника  $AOB$  строятся две дуги, равные  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  («луночка»). Докажите, что если окружность, содержащая первую дугу, касается фиксированной окружности, вписанной в угол  $O$ , то и окружность, содержащая вторую дугу, касается фиксированной окружности, вписанной в тот угол.

Утверждение это можно усилить: окружность, содержащая дугу  $\varphi_2$ , касается двух окружностей; правда, вторая может быть вписана уже не в данный угол, а в вертикальный с ним.

Упражнение 9 — в некотором смысле, сильное обобщение теоремы о сегменте. Последняя является частным (вернее, предельным) случаем, когда  $\varphi_1 = 0$ , и, следовательно, одна из дуг луночки вырождается в прямую, а луночка — сегмент. Тем не менее, решение задачи о луночке следует из этого своего частного случая.

### Доказательство теоремы о сегменте

Докажем, что (в обозначениях рисунка 5,6) окружность, касающаяся прямых  $a$  и  $b$  в точках  $N_a$  и  $N_b$  соответственно, касается окружности  $\omega$ . Доказательство для второй окружности, а также для остальных случаев теоремы совершенно аналогичны. Следующее утверждение является небольшим усилением известной теоремы об угле между касательной и хордой.

**Лемма 1.** На окружности даны точки  $A$  и  $B$ . Прямая  $a$  касается этой окружности в точке  $A$ . Тогда угол между прямыми  $a$  и  $AB$  равен половине дуги  $\overset{\frown}{AB}$ . Обратно: если угол между прямыми  $a$  и  $AB$  равен  $\overset{\frown}{AB}/2$ , то прямая  $a$  касается этой окружности в точке  $A$ .

**Упражнение 10.** Докажите лемму 1.

**Лемма 2.** Если  $M$  — точка внутри выпуклого четырехугольника  $ABCD$  такая, что  $\angle CMB = \angle MAB + \angle MDC$  (рис. 11), то окружности  $AMB$  и  $CMD$  касаются в точке  $M$ .

**Доказательство.** Возьмем внутри угла  $CMB$  точку  $K$  такую, что  $\angle KMB = \angle MAB$  и  $\angle KMC = \angle MDC$  (по условию леммы, это можно сделать). Так как  $\angle KMC = \angle MDC = \overset{\frown}{CM}/2$ , то, по



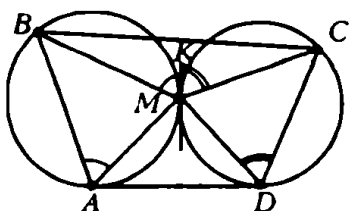


Рис. 11

лемме 1, окружность  $CMD$  касается прямой  $MK$  в точке  $M$ . Точно так же  $\angle KMB = \angle MAB = \widehat{BM}/2$ , и окружность  $MAB$  касается прямой  $MK$  в точке  $M$ .

Таким образом, окружности  $CMD$  и  $BMA$  касаются, так как  $KM$  — их общая касательная в точке  $M$ .

Доказательству теоремы о сегменте предположим некоторые наблюдения. Отложим на сторонах треугольника  $AOB$  точки  $N_a$  и  $N_b$  такие, что  $ON_a = ON_b$ . Пусть  $I$  — центр окружности  $\gamma$ , причем  $\angle AN_aI = \angle IN_bB = \alpha < \pi/2$ . Пусть  $V$  — вторая точка пересечения окружностей  $AIN_a$  и  $BN_bI$  (рис.12). Поскольку  $\angle IN_bB = \angle IVB$  (как углы, вписанные в окружность  $BN_bI$ ) и, аналогично,  $\angle AN_aI = \angle AVI$ , получаем, что  $\angle AVB = 2\alpha$ . Если теперь провести окружность  $ABV$ , окажется, что  $\widehat{AB} = 4\alpha$ , т.е.

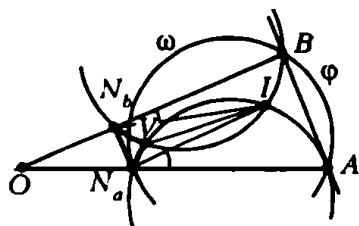


Рис. 12

величина дуги  $AB$  не зависит от выбора точек  $A$  и  $B$ .

Нам осталось положить  $\varphi = 4\alpha$  и доказать такое утверждение: если  $\angle AN_aI = \angle IN_bB = \varphi/4$ , то окружность, касающаяся  $AO$  и  $OB$  в точках  $N_a$  и  $N_b$ , касается окружности  $\omega$  в точке  $V$ .

Теперь мы можем завершить доказательство теоремы 2. Из ранее сказанного следует, что точка  $V$  лежит на окружности  $\omega$ . Осталось доказать, что окружность  $N_aVN_b$  касается прямых  $a$  и  $b$  и окружности  $\omega$ .

Все дальнейшее основано на подсчете углов, чем мы сейчас и займемся.

Прежде всего,  $\angle ON_bN_a = \angle ON_aN_b = (\pi - \angle AOB)/2$ . С другой стороны,  $\angle N_bVN_a = 2\pi - \angle IVN_b - \angle IVN_a = \angle IAN_a + \angle IN_bBI = (\angle OBA + \angle OAB)/2 = (\pi - \angle AOB)/2$ . Итак,  $\angle ON_bN_a = \angle N_bVN_a = \angle N_bN_aO$ , и, по лемме 1, окружность  $N_aVN_b$  касается прямых  $OA$  и  $OB$  в точках  $N_a$  и  $N_b$  соответственно.

Для доказательства касания окружностей  $N_aVN_b$  и  $\omega$  достаточно убедиться в том (лемма 2), что

$$\angle VN_aN_b + \angle BAV = \angle BVN_b. \quad (1)$$

Прежде всего заметим, что

$$\angle NAV = \angle BAI + \angle IAV,$$

но

$$\angle IAV = \angle IN_aV = \angle AN_aV - \angle AN_aI = \angle AN_aV - \varphi/4.$$

Поэтому

$$\angle BAV = \angle AN_aV - \varphi/4 + \angle BAO/2. \quad (2)$$

По лемме 1,

$$\angle VN_bN_b = \angle VN_bB. \quad (3)$$

Поэтому левая часть равенства (1) с учетом (2) и (3) оказывается равной

$$\angle VN_bB + \angle AN_aV - \varphi/4 + \angle BAO/2. \quad (4)$$

Наконец,

$$\angle BVN_b = \angle BIN_b = \pi - \angle IN_bB - \angle N_bBI = \pi - \varphi/4 - \angle OBA/2. \quad (5)$$

Четырехугольники  $N_aVIA$  и  $N_bVIB$  — вписанные (каждый — в свою окружность), следовательно,

$$\angle AN_aV = \pi - \angle VIA, \quad \angle VN_bB = \pi - \angle BIV,$$

но тогда

$$\angle AN_aV + \angle VN_bB = 2\pi - \angle VIA - \angle BIV = \angle AIB,$$

откуда следует, что выражение (4) равно  $\angle AIB - \varphi/4 + \angle BAO/2 = \pi - \varphi/4 - \angle OBA/2$ , т.е. совпадает с правой частью равенства (5), что и требовалось.

Теорема о сегменте доказана.

**Упражнение 11.** Проведите самостоятельно все рассуждения для остальных случаев.

В следующих упражнениях речь идет о произвольном криволинейном треугольнике  $ABC$ , состоящем из отрезков  $CA$  и  $CB$  и дуги  $AB$  некоторой окружности.

### Упражнения

12. Впишите с помощью циркуля и линейки окружность в данный криволинейный треугольник  $ABC$ . Всегда ли это возможно?

13. Вписанная окружность криволинейного треугольника  $ABC$  касается его дуги  $AB$  в точке  $V$ . Докажите, что биссектриса угла  $AVB$  проходит через центр окружности, вписанной в (обычный) треугольник  $ABC$ .

14. Вписанная в криволинейный треугольник  $ABC$  окружность касается стороны  $AC$  в точке  $M$  и дуги  $AB$  в точке  $V$ . Докажите, что окружность  $MVA$  проходит через центр вписанной окружности (обычного) треугольника  $ABC$ .

15. Дан треугольник  $ABC$  (обычный). Окружность, вписанная в угол  $C$ , касается изнутри окружности  $ABC$  в точке  $M$ ,  $T$  — середина дуги  $AB$ , содержащей точку  $C$ ,  $I$  — центр вписанной в треугольник  $ABC$  окружности. Докажите, что точки  $I$ ,  $T$ ,  $M$  лежат на одной прямой.

### Доказательство теоремы Фейербаха

Мы увидим, что теорема Фейербаха является частным случаем доказанной нами теоремы, точнее — тем ее случаем, когда (см. формулировку теоремы о сегменте) угол между прямыми  $a$  и  $b$  равен  $(2\pi - \varphi)/2$ .

Пусть  $A'B'C'$  — срединный треугольник данного треугольника  $ABC$  (рис.13),  $N$  и  $N'$  — точки касания прямой  $BC$  со

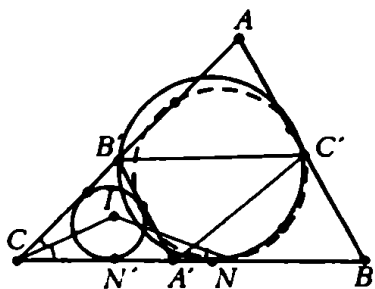


Рис. 13

вписанными окружностями треугольников  $ABC$  и  $A'B'C'$ , соответственно,  $I'$  — центр вписанной в треугольник  $A'B'C'$  окружности.

Докажем, что вписанная окружность треугольника  $ABC$  касается окружности  $A'B'C'$  (т.е. окружности девяти точек).

Треугольники  $CAB$  и  $CA'B'$ , а значит и вписанные в них круги, гомотетичны относительно  $C$  с коэффициентом  $2 : 1$ . Следовательно,  $CN = 2CN'$ , а значит,  $CN' = N'N$ , и треугольник  $CIN'$  равнобедренный.

Применим теорему о сегменте, положив  $\varphi = 2(\pi - \angle ACB)$ .

Имеем  $\overset{\frown}{A'B'} = 2\pi - \overset{\frown}{B'A'} = 2\pi - 2\angle A'C'B' = 2\pi - 2\angle ACB$  ( $\angle A'C'B' = \angle ACB$ , так как  $CB'C'A'$  — параллелограмм). Итак,  $\overset{\frown}{A'B'} = \varphi$ . Кроме того,  $\angle I'NC = (2\pi - \varphi)/4$  (так как треугольник  $I'CN$  — равнобедренный, то  $\angle I'NC = \angle ICN = \angle ABC/2 = (2\pi - \varphi)/4$ , в силу выбора числа  $\varphi$ ).

По теореме о сегменте, окружность  $\omega$ , проходящая через  $A'$  и  $B'$ , для которой  $\overset{\frown}{A'B'} = \varphi$  (а это — окружность девяти точек), должна касаться окружности, вписанной в угол  $ACB$  и касающейся прямой  $CB$  в точке  $N$  (ибо для точки  $N$  верно равенство  $\angle I'NC = (2\pi - \varphi)/4$ ), т.е. вписанной окружности треугольника  $ABC$ .

Заменив теперь в предыдущих рассуждениях слово «вписанная», получим то, что надо (имеются в виду внеписанные

окружности треугольников  $ACB$  и  $A'C'B'$ , соответствующие вершине  $C$ ). Тем самым теорема Фейрбаха доказана.

Заметим, что в первой части доказательства мы воспользовались не всей теоремой о сегменте, а, так сказать, только ее половиной, ибо теорема говорит о двух фиксированных окружностях, касающихся окружности  $\omega$ . Одна из них в данном случае — это вписанная в треугольник  $ABC$  окружность. А где вторая? Ответ на этот вопрос дает следующее упражнение.

**Упражнение 16.** От остроугольного треугольника  $ABC$  прямой, касающейся его вписанной окружности, отрезали равнобедренный треугольник  $AKL$  с основанием  $AK$  (рис. 14). Докажите, что вписанная в треугольник  $AKL$  окружность касается окружности девяти точек треугольника  $ABC$ .

Так как такой «треугольничек» можно отрезать от каждого из трех углов треугольника  $ABC$ , то получаем уже не одну, а три окружности, касающиеся окружности девяти точек (почему, кстати, три, а не шесть?)

А если похожую процедуру проделать с внеписанной окружностью?

**Упражнение 17.** На продолжениях сторон  $BA$  и  $CA$  остроугольного треугольника  $ABC$  за точку  $A$  взяли точки  $M$  и  $N$  соответственно, так, что прямая  $MN$  касается внеписанной окружности треугольника  $ABC$ , соответствующей вершине  $C$ , а треугольник  $AMN$  — равнобедренный с основанием  $AM$ . Докажите, что внеписанная окружность треугольника  $AMN$ , соответствующая вершине  $N$ , касается окружности девяти точек треугольника  $ABC$ .

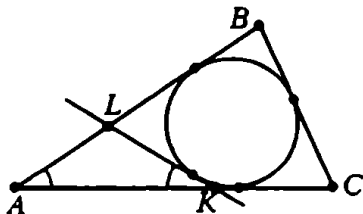


Рис. 14

Точки  $M$  и  $N$  можно было бы взять и на продолжениях сторон  $AB$  и  $CB$  за точку  $B$ , и мы получили бы еще одну окружность, касающуюся окружности девяти точек.

**Упражнение 18.** Пусть внеписанная окружность треугольника  $ABC$  касается продолжений сторон  $CA$  и  $CB$  в точках  $K$  и  $L$  соответственно. На отрезке  $CK$  взята точка  $M$ , а на отрезке  $CL$  — точка  $N$  так, что прямая  $MN$  касается той внеписанной окружности, и треугольник  $CMN$  — равнобедренный с основанием  $CM$ . Докажите, что вписанная в треугольник  $CMN$  окружность касается окружности девяти точек треугольника  $ABC$ .

Упражнения 17 — 18 каждой внеписанной окружности ставит в соответствие 3 окружности, касающиеся окружности девяти точек. Так как внеписанных окружностей у треугольника три, то получаем всего 9 окружностей.

Пора считать. Сколько мы уже знаем окружностей, касающихся окружности девяти точек?

Вписанная окружность, да 3 внеписанных, да 3 окружности из упражнения 16, да 9 окружностей из упражнений 17, 18 — всего 16 окружностей.

Но и это еще не все!

**Упражнение 19.** Пусть  $H$  — точка пересечения высот треугольника  $ABC$ . Докажите, что треугольники  $ABC$ ,  $AHC$ ,  $AHB$  и  $BHC$  имеют общую окружность девяти точек.

Но каждый из перечисленных в упражнении 19 треугольников имеет свое множество из шестнадцати окружностей, касающихся окружности девяти точек, так что наша цифра учетверяется: получаются 64 окружности, касающиеся окружности девяти точек треугольника  $ABC$ !

В заключение поговорим о точках касания. В упражнениях 20 — 22  $F$  — точка касания окружности девяти точек треугольника  $ABC$  и его вписанной окружности.

#### Упражнения

20. Стороны треугольника  $A_1B_1C_1$  параллельны сторонам треугольника  $ABC$  и касаются окружности девяти точек последнего (рис.15).

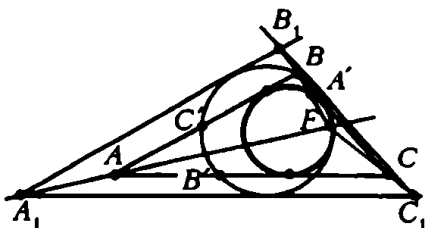


Рис. 15

Докажите, что прямые  $A_1A$ ,  $B_1B$ ,  $C_1C$  пересекаются в точке  $F$ .

21. Докажите, что окружности девяти точек треугольников  $AIB$ ,  $BIC$ ,  $CIA$  пересекаются в точке  $F$ , где  $I$  — центр вписанного круга треугольника  $ABC$ .

22. Пусть  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$  — соответственно середины сторон  $BC$ ,  $AC$ ,  $AB$  треугольника  $ABC$  (вершины

перечислены против часовой стрелки). Докажите, что три прямые, соединяющие центры вписанных окружностей треугольников  $AC'B'$ ,  $BA'C$ ,  $CB'A'$  соответственно с серединами дуг  $B'C'$ ,  $A'B'$ ,  $CA'$  окружности девяти точек треугольника  $ABC$ , пересекаются в точке  $F$ .

В заключение отметим, что теорема о сегменте имеет, по-видимому, еще множество интересных следствий. В формулировке теоремы есть два свободных параметра — угол  $O$  между прямыми  $a$  и  $b$  и угол  $\varphi$ . Мы рассмотрели лишь два частных случая:  $\angle AOB = \varphi/2$  (упражнения 4 и 5) и  $\angle AOB = (2\pi - \varphi)/2$  (теорема Фейербаха).

Возможно, при других соотношениях между  $\angle AOB$  и  $\varphi$  тоже получатся интересные результаты.

В этой статье собраны некоторые геометрические факты, прямо или косвенно связанные с биссектрисой треугольника. Среди них читатель найдет и несложные, но часто используемые «леммы», и более солидные и трудные «теоремы» и просто красивые «задачи». Но мы не станем их никак классифицировать, а просто будем нумеровать в порядке появления в статье. Утверждения, которые приводятся в статье без доказательства, автоматически включаются в число упражнений. Впрочем, и имеющиеся в статье доказательства мы постарались изложить по возможности лаконично, чтобы оставить читателям простор для размышлений.

### Это должен знать каждый

Напомним прежде всего некоторые общепринятые обозначения:  $ABC$  — данный треугольник,  $S_{ABC}$  — его площадь,  $BC = a$ ,  $CA = b$ ,  $AB = c$ ,  $2p = a + b + c$ ,  $O$  и  $R$  — соответственно, центр описанной окружности и ее радиус,  $I$  и  $r$  — центр и радиус вписанной окружности. Кроме того, треугольник имеет три внеписанные окружности, каждая из которых касается одной стороны треугольника и продолжений двух других сторон. Их центры и радиусы будем обозначать, соответственно,  $I_a$ ,  $I_b$ ,  $I_c$ ,  $r_a$ ,  $r_b$ ,  $r_c$  ( $I_a$  — центр внеписанной окружности, касающейся стороны  $BC$  и продолжений сторон  $AB$  и  $AC$ ,  $r_a$  — ее радиус).

Все другие обозначения будут разъясняться в соответствующих местах.

(1) Пусть биссектриса угла  $A$  пересекает сторону  $BC$  в точке  $A_1$ . Тогда

$$\frac{BA_1}{A_1C} = \frac{BA}{AC} = \frac{c}{b}.$$

(2) Пусть биссектриса внешнего угла при вершине  $A$  пересекает прямую  $BC$  в точке  $A_2$ . Тогда

$$\frac{BA_2}{A_2C} = \frac{BA}{AC} = \frac{c}{b}.$$

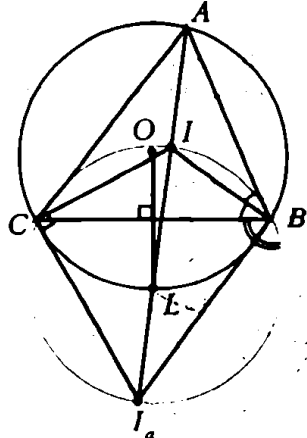


Рис. 1

(3)  $S_{ABC} = pr$ .

(4)  $S_{ABC} = (p - a)r_a$ .

(5) Если  $M$  — точка касания вписанной окружности со стороной  $AB$ , то  $AM = p - a$ . (Аналогично определяются и другие отрезки, на которые стороны треугольника делятся точками касания со вписанной окружностью.)

(6) Если  $M$  — точка касания внешней окружности с центром  $I_a$  с прямой  $AB$ , то  $AM = p$ .

(7) Вершины  $B$  и  $C$  лежат на окружности с диаметром  $II_a$ ; центр  $L$  этой окружности лежит на описанной окружности (рис. 1).

Таким образом, центр вписанной окружности  $I$  обладает следующим свойством: прямые  $AI$ ,  $BI$  и  $CI$  (т.е. биссектрисы) проходят через центры описанных окружностей треугольников  $BIC$ ,  $CIA$ ,  $AIB$  соответственно. Верна и обратная теорема.

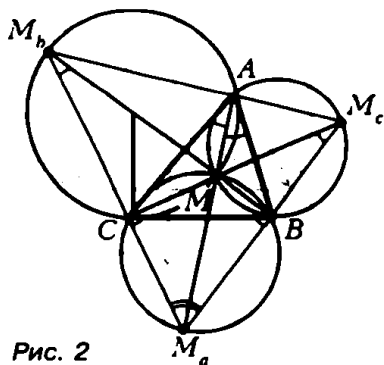


Рис. 2

(8) Если прямые  $AM$ ,  $BM$  и  $CM$  проходят через центры описанных окружностей треугольников  $BMC$ ,  $CMA$  и  $AMB$ , то  $M$  — центр вписанной окружности треугольника  $ABC$ .

В самом деле, пусть  $M_a$ ,  $M_b$ ,  $M_c$  — точки пересечения прямых  $AM$ ,  $BM$  и  $CM$  с соответствующими окружностями, отличные от  $M$  (рис. 2). Тогда  $MM_a$ ,  $MM_b$  и  $MM_c$

— диаметры этих окружностей, поэтому  $M_aA$ ,  $M_bB$  и  $M_cC$  — высоты треугольника  $M_aM_bM_c$ . Отсюда получаем  $\angle BAM = \angle BM_cM = 90^\circ - \angle BM_aC = \angle CM_bM = \angle CAM$ , т.е.  $M$  лежит на биссектрисе угла  $A$  и, аналогично, на биссектрисах углов  $B$  и  $C$ .

### Расстояния между центрами «замечательных окружностей»

(9)  $OI^2 = R^2 - 2Rr$  (формула Эйлера).

(10)  $OI_a^2 = R^2 + 2Rr_a$ .

(11)  $II_a^2 = 4R(r_a - r)$ .

Для доказательства первых двух формул напомним, что если  $M$  и  $N$  — точки пересечения произвольной прямой, проходящей через данную точку  $P$ , с окружностью радиусом  $R$

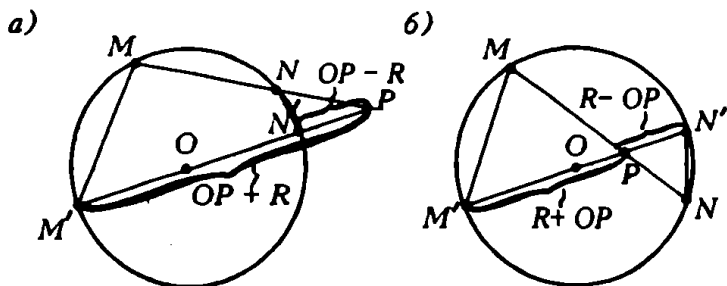


Рис. 3

с центром  $O$ , то  $PM \cdot PN = R^2 - OP^2$ . (Это вытекает из подобия треугольников  $PMM'$  и  $PNN'$ , где  $M'$  и  $N'$  — точки пересечения прямой  $OP$  с окружностью; рис.3, а и б). Отсюда следует, что  $R^2 - OI^2 = IA \cdot IL$ , где  $L$  — точка пересечения биссектрисы угла  $A$  с описанной окружностью (рис.4). Но  $IA = r/\sin(\angle A/2)$ , а  $IL = LB = 2R \sin(\angle A/2)$  по утверждению (7), поэтому  $R^2 - OI^2 = 2Rr$ . Аналогично,  $OI_a^2 - R^2 = I_aL \cdot I_aA = 2R \sin(\angle A/2) r_a/\sin(\angle A/2) = 2Rr_a$ . Наконец,  $II_a^2 = (2IL) \cdot (I_aA - IA) = 4R \sin \frac{\angle A}{2} \cdot \frac{r_a - r}{\sin \frac{\angle A}{2}} = 4R(r_a - r)$ .

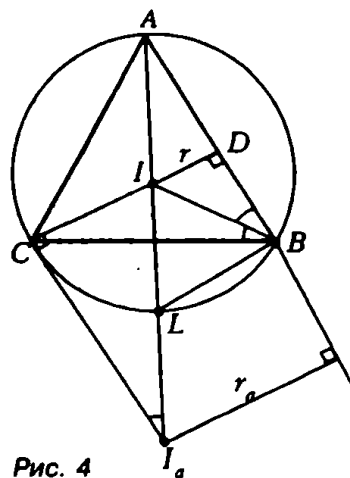


Рис. 4

(12) Точки, симметричные центрам вневписанных окружностей относительно центра описанной окружности, лежат на окружности радиусом  $2R$  с центром  $I$ .

### Два экстремальных свойства центра вписанной окружности

Возьмем внутри треугольника  $ABC$  произвольную точку  $M$ . Существует довольно много неравенств, касающихся расстояний от этой точки до вершин треугольника. Мы рассмотрим два таких неравенства, имеющих отношение к теме статьи.

(13) Обозначим через  $A_1$  точку пересечения прямой  $AM$  с



описанной окружностью. Тогда

$$\frac{BM \cdot CM}{A_1M} \geq 2r.$$

$$(14) \quad AM \sin \angle BMC + BM \sin \angle CMA + CM \sin \angle AMB \leq p.$$

В обоих случаях равенство достигается, если  $M$  совпадает с  $I$  — центром вписанной окружности.

Допустим, что наименьшее значение выражения  $f(M) = \frac{BM \cdot CM}{A_1M}$ , стоящего в левой части неравенства (13), достигается в некоторой точке  $M$  внутри треугольника  $ABC$ . Мы покажем, что  $M = I$ . А поскольку  $f(I) = 2r$  (это следует, например, из подобия прямоугольных треугольников  $VID$  и  $I_aIC$  на рисунке 4), откуда будет вытекать, что если  $f(M)$

принимает свое наименьшее значение внутри треугольника  $ABC$ , то  $f(M) \geq 2r$ . Выделенное предположение является нетривиальным и очень существенным. Мы обсудим его несколько позже.

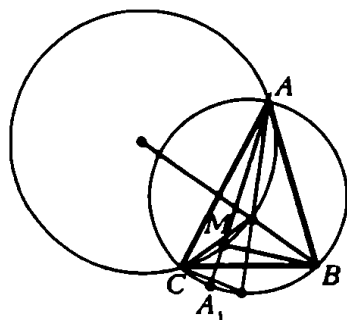


Рис. 5

Опишем около треугольника  $AMC$  окружность (рис.5). Все треугольники  $CMA_1$ , получающиеся при перемещении точки  $M$  по ее дуге  $AC$ , подобны между собой (почему?), следовательно, отношение  $CM/A_1M$  бу-

дет для них одним и тем же. Поэтому, если  $M$  — точка минимума величины  $f(M)$ , прямая  $BM$  должна проходить через центр окружности, описанной около треугольника  $AMC$ , иначе мы могли бы уменьшить  $BM$ , оставляя постоянным отношение  $CM/A_1M$ . Пусть теперь  $B_1$  и  $C_1$  — точки пересечения прямых  $BM$  и  $CM$  с окружностью, описанной около треугольника  $ABC$ , тогда, как мы видели при доказательстве формулы (9),  $MA \cdot MA_1 = MB \cdot MB_1 = MC \cdot MC_1$  и потому

$$\frac{BM \cdot CM}{A_1M} = \frac{CM \cdot AM}{B_1M} = \frac{AM \cdot BM}{C_1M}.$$

Следовательно, прямые  $AM$  и  $CM$  также должны проходить через центры окружностей, описанных около треугольников  $BMC$  и  $AMB$  соответственно, и в силу (8) точка  $M$  — центр вписанной окружности треугольника  $ABC$ .

Вернемся к вопросу о достижении наименьшего значения функцией  $f(M)$ . В анализе доказываем, что непрерывная числовая функция, заданная на отрезке, обязательно принимает в некоторых его точках свое наибольшее и наименьшее значение. Аналогичная теорема верна и для функций нескольких переменных, например для функций на плоскости; в частности, функция, непрерывная на многоугольнике, всегда достигает на нем наибольшего и наименьшего значения. Однако к нашей задаче эта теорема непосредственно неприменима — функция  $f(M)$  не определена в вершинах треугольника  $ABC$ . Более того, ее даже невозможно доопределить в точках  $A, B, C$  так, чтобы она стала непрерывной на всем треугольнике (включая границу)! Но если отрезать от треугольника уголки, мы получим шестиугольник, на котором наша функция уже будет непрерывна и, следовательно, достигает наименьшего значения. Можно показать, что вблизи границы треугольника  $f(M) > 2r$ . Поэтому, если отрезаемые уголки достаточно малы, наименьшее значение  $f(M)$  на шестиугольниках, а значит, и на треугольнике, достигается при  $M = I$  и равно  $2r$ .

Рассмотренное доказательство неравенства (13) относят к *косвенным*, в отличие от так называемых *прямых*, когда непосредственно доказываем, что (в нашем случае)  $f(M) \geq f(I)$  для всех точек  $M$  внутри треугольника  $ABC$ . Косвенные доказательства нужно проводить с известной осторожностью, потому что наибольшее или наименьшее значение функции достигается отнюдь не всегда. За примером далеко ходить не надо: сама функция  $f(M)$  не принимает своего наибольшего значения; читателю предлагается доказать, что  $f(M) < l$ , где  $l$  — длина наибольшей стороны треугольника, для всех точек  $M$  треугольника  $ABC$  (кроме, конечно, вершин), причем величина  $f(M)$  может быть сколь угодно близка к  $l$ .

Перейдем к доказательству неравенства (14). Оно тоже будет косвенным: мы покажем, что точка максимума  $M$  левой части этого неравенства (если она существует!) совпадает с  $I$ .

Опишем около треугольника  $BMC$  окружность и продолжим отрезок  $AM$  до вторичного пересечения с ней в точке  $A_2$  (рис. 6). Применим к четырехугольнику  $BMSA_2$  *теорему Птолемея* — «сумма произведений противоположных сторон вписанного в

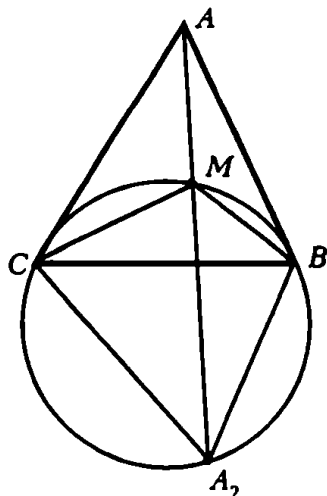


Рис. 6

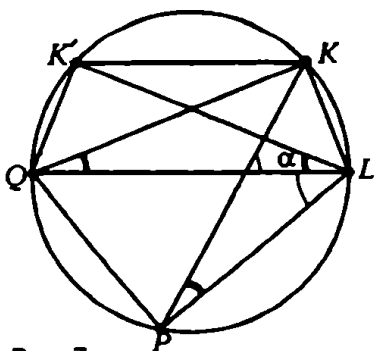


Рис. 7

$= K'L \cdot LP \sin \angle K'LP + K'Q \cdot QP \cdot \sin \angle K'QP = (KQ \cdot LP + KL \cdot QP) \sin \alpha$ ,  
 ибо  $\angle K'LP = \alpha$  (см. рис.7).

Учитывая, что длины хорд одной окружности пропорциональны синусам опирающихся на них углов, получим

$$BM \sin \angle A_2MC + CM \sin \angle A_2MB = A_2M \sin \angle BMC,$$

или

$$BM \sin \angle AMC + CM \sin \angle AMB = A_2M \sin \angle BMC.$$

Сопоставляя последнее равенство с неравенством (14), видим, что левая часть неравенства равна  $AA_2 \sin \angle BMC$ . Значит, прямая  $AM$  должна проходить через центр окружности, описанной около  $BMC$ , поскольку в противном случае, перемещая  $M$  по дуге  $BC$ , мы можем увеличить левую часть неравенства (14). Дальнейшие рассуждения (в том числе и доказательство существования точки максимума) проводятся так же, как и в задаче (13).

Докажите самостоятельно, что если  $M$  совпадает с  $I$ , то  $AA_2 \sin \angle BMC = p$ ; для этого можно воспользоваться, например, задачами (6) и (7) и тем, что  $\angle BIC = 90^\circ + \angle A/2$ .

### Когда подводит интуиция

Если у треугольника равны два «однотипных» элемента (например, два угла или две медианы и т.п., то естественно ожидать, что он будет равнобедренным. Среди задач на доказательство утверждений такого рода издавна одной из самых трудных считается так называемая задача Штейнера — Лемуса.

(15) Докажите, что если в треугольнике равны две биссектрисы, то треугольник равнобедренный.

окружность четырехугольника равна произведению его диагоналей»:

$$BM \cdot A_2C + CM \cdot A_2B = BC \cdot A_2M.$$

Эту теорему можно доказать, выражая двумя способами площадь четырехугольника: если  $KLPQ$  — вписанный четырехугольник и хорда  $KK'$  параллельна диагонали  $LQ$ , то  $S_{KLPQ} = S_{K'LPQ}$  (рис.7); в то же время  $2S_{KLPQ} =$

$= KP \cdot LQ \cdot \sin \alpha$ , где  $\alpha$  — угол между

диагоналями  $KP$  и  $LQ$ , а  $2S_{K'LPQ} =$

$= K'Q \cdot LP \cdot \sin \angle K'QP = (KQ \cdot LP + KL \cdot QP) \sin \alpha$ ,  
 ибо  $\angle K'LP = \alpha$  (см. рис.7).

Эта задача широко известна<sup>1</sup>, а вот следующая забавная вариация на ту же тему почти неизвестна даже среди любителей геометрии.

(16) *Про данный треугольник известно, что треугольник, образованный основаниями его биссектрис, является равнобедренным. Можно ли утверждать, что и данный треугольник равнобедренный?*

Оказывается, утверждать это, вообще говоря, нельзя! Более точно, пусть  $A_1, B_1, C_1$  — основания биссектрис треугольника  $ABC$ . Если  $A_1B_1 = A_1C_1$ , а треугольник  $ABC$  — не равнобедренный, то его угол  $A$  тупой и  $\cos \angle A$  лежит в интервале  $\left(-\frac{1}{4}; \frac{\sqrt{17}-5}{4}\right)$ , что для самого угла  $A$  соответствует интервалу  $(102^\circ 40'; 104^\circ 28')$  (значения в градусной мере приближенные). Обратно, для любого угла  $\alpha$  из этого интервала можно указать единственный (с точностью до подобия) неравнобедренный треугольник  $ABC$  с  $A = \alpha$ , для которого  $A_1B_1 = A_1C_1$ . Подробное решение этой задачи дается в книге И.Ф. Шарыгина «Задачи по геометрии (планиметрия)» (М., Наука, 1982, с.157). К сожалению, автор не сумел построить конкретный пример треугольника (т.е. точно указать величины всех его углов или длины сторон) со столь экзотическим свойством. Может быть, это удастся читателям?

### Еще 11 задач

(17) Докажите, что биссектриса треугольника делит пополам угол между радиусом описанной окружности и высотой, проведенными из той же вершины.

(18) Пусть  $AA'$  — биссектриса треугольника  $ABC$ . Докажите равенства

$$AA' = \sqrt{bc - BA' \cdot CA'} = \frac{2bc \cos(A/2)}{b+c}.$$

(19) Докажите, что высоты треугольника служат биссектрисами треугольника, образованного их основаниями.

(20) Пусть  $M$  и  $N$  — проекции точки пересечения высот треугольника  $ABC$  на биссектрисы внутреннего и внешнего углов при вершине

---

<sup>1</sup> История этой задачи и одно из решений (возможно, самое короткое) приводятся, например, в книге Г.С.М. Коксетера и С.Л. Грейтцера «Новые встречи с геометрией» (М., Наука, 1978), гл.1, §5.

А этого треугольника. Докажите, что прямая  $MN$  делит сторону  $BC$  пополам.

(21) Докажите, что сумма площадей трех треугольников, вершинами каждого из которых являются три точки касания одной внеписанной окружности со сторонами или продолжениями сторон данного треугольника, равна удвоенной площади этого треугольника, сложенной с площадью треугольника с вершинами в точках касания вписанной окружности с его сторонами.

(22) Пусть  $AA'$ ,  $BB'$ ,  $CC'$  — биссектрисы треугольника  $ABC$ ,  $L$  и  $K$  — точки пересечения прямых  $AA'$  и  $B'C'$ ,  $CC'$  и  $A'B'$  соответственно. Докажите, что  $BB'$  — биссектриса угла  $LBK$ .

(23) Пусть  $M$  и  $N$  — середины диагоналей  $AC$  и  $BD$  вписанного четырехугольника  $ABCD$ . Докажите, что если  $BD$  — биссектриса угла  $ANC$ , то  $AC$  — биссектриса угла  $BMD$ .

(24) В треугольнике  $ABC$  биссектриса угла  $B$  пересекает прямую, проходящую через середину  $AC$  и середину высоты, опущенной на  $AC$ , в точке  $M$ ,  $N$  — середина биссектрисы угла  $B$ . Докажите, что биссектриса угла  $C$  является также и биссектрисой угла  $MCN$ .

(25) Через основания биссектрис треугольника  $ABC$  проведена окружность. Рассмотрим три хорды, образованные при пересечении сторон треугольника с этой окружностью. Докажите, что длина одной из этих хорд равна сумме длин двух других.

(26) В треугольнике  $ABC$  на сторонах  $AB$  и  $BC$  взяты точки  $K$  и  $L$  так, что  $AK = KL = LC$ . Через точку пересечения прямых  $AL$  и  $CK$  проведена прямая, параллельная биссектрисе угла  $B$ , пересекающая прямую  $AB$  в точке  $M$ . Докажите, что  $AM = BC$ .

(27) Дан вписанный четырехугольник  $ABCD$ . Противоположные стороны  $AB$  и  $CD$  при продолжении пересекаются в точке  $K$ , стороны  $BC$  и  $AD$  — в точке  $L$ . Докажите, что биссектрисы углов  $BKC$  и  $BLA$  перпендикулярны и пересекаются на прямой, соединяющей середины  $AC$  и  $BD$ .

Среди заданий по математике, предложенных на всесоюзном конкурсе «Абитуриент-91» газетой «Поиск» (4–10 января 1991 г.), была и такая геометрическая задача: «Окружность, проходящая через основания биссектрис внутренних углов треугольника, касается одной из его сторон. Верно ли, что этот треугольник равнобедренный?»

Ответ на вопрос задачи отрицательный. Пример неравнобедренного треугольника, удовлетворяющего указанному условию, приведен в статье И.Шарыгина «Откуда берутся задачи?» («Квант» №9, 1991 г.). В этом примере окружность, проходящая через основания биссектрис  $AA_1$ ,  $BB_1$ ,  $CC_1$  треугольника  $ABC$ , пересекает продолжения его сторон. Оказывается, это не случайно. Справедлива следующая теорема,

**Теорема 1.** *Если окружность, проходящая через основания  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$  биссектрис треугольника  $ABC$ , касается одной из его сторон и пересекает остальные стороны (а не их продолжения!), то такой треугольник — равнобедренный.*

Утверждение этой теоремы является обратным очевидному утверждению, что окружность, проходящая через точки  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$  и пересекающая боковые стороны равнобедренного треугольника  $ABC$ , касается основания этого треугольника. Так что она может пополнить небольшую коллекцию обратных утверждений, приведенную в статье «Неожиданность обратной задачи» («Квант» №2, 1991). Доказательство ее, по-видимому, не менее сложно, чем доказательство знаменитой теоремы Штейнера-Лемуса о том, что если две биссектрисы треугольника равны, то он равнобедренный.

## Подготовительные результаты

Прежде чем начать доказывать нашу теорему, напомним некоторые факты, известные внимательному читателю журнала «Квант».

**Теорема Чевы.** Пусть точки  $A_1, B_1, C_1$  лежат соответственно на сторонах  $BC, CA, AB$  треугольника  $ABC$  (рис. 1). Для того чтобы отрезки  $AA_1, BB_1, CC_1$  пересекались в одной точке, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство

$$\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1.$$

(Отрезки  $AA_1, BB_1, CC_1$  называются *чевианами*.)

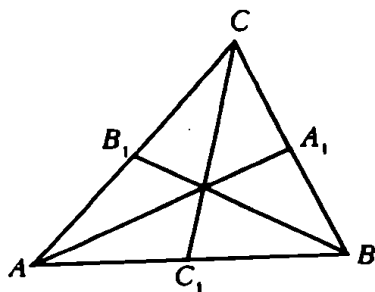


Рис. 1

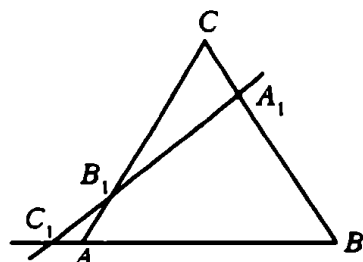


Рис. 2

**Теорема Менелая.** Пусть точки  $A_1$  и  $B_1$  лежат на сторонах  $BC$  и  $CA$  треугольника  $ABC$  (рис. 2), а точка  $C_1$  — на продолжении стороны  $AB$  этого треугольника. Для того чтобы  $A_1, B_1, C_1$  лежали на одной прямой, необходимо и достаточно, чтобы

$$\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1.$$

В дальнейшем нам также понадобятся следующие леммы (заметим, что каждая из них имеет и самостоятельное значение).

**Лемма 1.** Пусть  $AA_1, BB_1, CC_1$  — чевианы треугольника  $ABC$ ,  $A_2, B_2, C_2$  — вторые точки пересечения окружности, описанной около треугольника  $A_1B_1C_1$ , соответственно со сторонами  $BC, CA, AB$  треугольника  $ABC$  (рис. 3). Тогда отрезки  $AA_2, BB_2, CC_2$  также являются чевианами треугольника  $ABC$ , т.е. пересекаются в одной точке.

**Доказательство.** Так как  $AA_1, BB_1, CC_1$  — чевианы треугольника  $ABC$ , то по теореме Чевы

$$\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1 \quad (1)$$

и, поскольку произведения секущих, проведенных к окружности из одной точки, на их внешние части равны, то  $AC_2 \cdot AC_1 = AB_2 \cdot AB_1$ ,

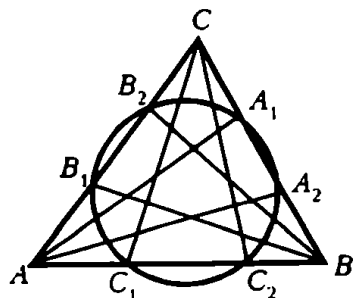


Рис. 3

$BA_2 \cdot BA_1 = BC_2 \cdot BC_1$ ,  $CB_2 \cdot CB_1 = CA_2 \cdot CA_1$ . Перемножив почленно эти равенства, получим

$$AC_2 \cdot AC_1 \cdot BA_2 \cdot BA_1 \cdot CB_2 \cdot CB_1 = AB_2 \cdot AB_1 \cdot BC_2 \cdot BC_1 \cdot CA_2 \cdot CA_1,$$

или

$$\frac{AC_2}{C_2B} \cdot \frac{BA_2}{A_2C} \cdot \frac{CB_2}{B_2A} \cdot \frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1,$$

откуда, учитывая (1), найдем, что

$$\frac{AC_2}{C_2B} \cdot \frac{BA_2}{A_2C} \cdot \frac{CB_2}{B_2A} = 1.$$

**Лемма 2.** Пусть  $CC_1$  — биссектриса внутреннего, а  $CD$  — внешнего угла при вершине  $C$  треугольника  $ABC$  (рис. 4). Тогда

$$\frac{AC_1}{C_1B} = \frac{AC}{CB}, \quad (2)$$

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AC}{CB}. \quad (3)$$

Доказательство этого факта можно найти, например, в школьном учебнике геометрии (или провести самостоятельно).

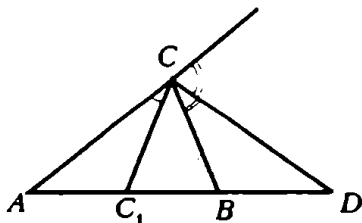


Рис. 4

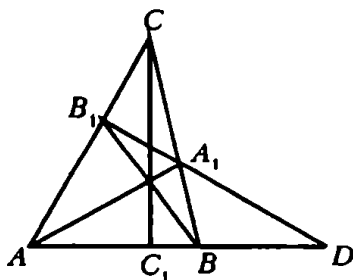


Рис. 5

**Лемма 3.** Пусть  $AA_1$ ,  $BB_1$ ,  $CC_1$  — медианы треугольника  $ABC$  (рис. 5),  $D$  — точка пересечения прямых  $B_1A_1$  и  $AB$ . Тогда

$$\frac{AC_1}{C_1B} = \frac{AD}{DB}.$$

**Доказательство.** Поскольку точки  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $D$  лежат на одной прямой, то по теореме Менелая

$$\frac{AB_1}{B_1C} \cdot \frac{CA_1}{A_1B} \cdot \frac{BD}{DA} = 1 \quad (4)$$

и по теореме Чевы

$$\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1. \quad (5)$$



Перемножив почленно (4) и (5), найдем, что

$$\frac{AD_1}{C_1B} \cdot \frac{BD}{DA} = 1 \text{ или } \frac{AC_1}{C_1B} = \frac{AD}{DB}. \quad (6)$$

**Лемма 4.** Пусть прямые  $AB$  и  $CD$ ,  $AD$  и  $BC$ , содержащие стороны описанного четырехугольника  $ABCD$ , пересекаются соответственно в точках  $M$  и  $N$  (рис. 6). Тогда биссектрисы углов  $BMC$  и  $ANB$  перпендикулярны.

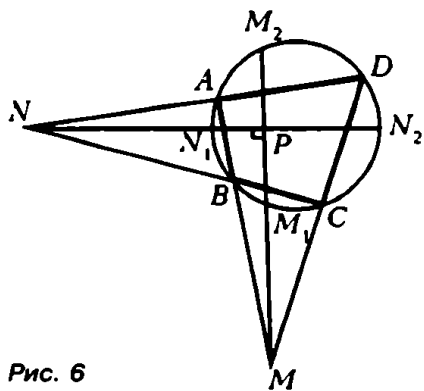


Рис. 6

**Доказательство.** Обозначим точки пересечения биссектрис углов  $BMC$  и  $ANB$  с описанной окружностью четырехугольника  $ABCD$  соответственно через  $M_1, M_2, N_1, N_2$  (см. рис. 6), и пусть угловые меры дуг  $BM_1, M_1C, CN_2, N_2D, DM_2, M_2A, AN_1, N_1B$  равны соответственно  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_7, \alpha_8$ .

Если  $P$  — точка пересечения прямых  $MM_1$  и  $NN_1$ , то  $\angle MPN = (\alpha_1 + \alpha_8 + \alpha_4 + \alpha_5)/2$ , но  $\angle PNB = (\alpha_3 - \alpha_8)/2 = \angle PNA = (\alpha_4 - \alpha_7)/2$ , т.е.  $\alpha_3 - \alpha_8 = \alpha_4 - \alpha_7$ , или  $\alpha_3 + \alpha_7 = \alpha_4 + \alpha_8$ . Аналогично,  $\alpha_6 + \alpha_2 = \alpha_5 + \alpha_1$ .

Сложив эти равенства, получим, что  $\alpha_3 + \alpha_7 + \alpha_6 + \alpha_2 = \alpha_4 + \alpha_8 + \alpha_5 + \alpha_1$ . Итак,  $\alpha_4 + \alpha_8 + \alpha_5 + \alpha_1 = (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_6 + \alpha_7 + \alpha_8)/2 = 360^\circ/2 = 180^\circ$ , откуда  $\angle MPN = 90^\circ$ .

### Доказательство теоремы 1

Приступим наконец к доказательству нашей теоремы. Пусть окружность, проходящая через точки  $A_1, B_1, C_1$ , пересекает стороны  $AC$  и  $BC$  неравнобедренного треугольника  $ABC$  в точках  $B_2$  и  $A_2$  и касается основания  $AC$  (рис. 7). Тогда из леммы 1 следует, что отрезки  $AA_2, BB_2, CC_1$  — чевианы треугольника  $ABC$ , а из лемм 2 и 3 — что  $B_1A_1, B_2A_2$  и  $AB$  пересекаются в одной точке  $D$ , совпадающей с основанием биссектрисы внешнего угла при вершине  $C$  (поэтому отрезки  $B_1A_1$  и  $B_2A_2$  не могут пересекаться внутри треугольника  $ABC$ , и точки  $B_1, B_2$  на стороне  $AC$  расположены в том же порядке, что и точки  $A_1, A_2$  на стороне  $BC$ ). Проведем биссектрису  $DP$  угла  $B_1DB_2$  и применим лемму 4 к вписанному четырехугольнику  $A_1A_2B_2B_1$ . Получим, что  $\angle CPD = 90^\circ$ , но  $\angle PCD = 90^\circ$ , как угол между биссектрисами  $CC_1$

и  $CD$  смежных углов. Итак, оказалось, что из одной точки  $D$  на прямую  $CC_1$  опущены два перпендикуляра. Полученное противоречие доказывает теорему.

Фактически мы доказали следующее более сильное утверждение: *пусть в треугольнике  $ABC$  отрезки  $AA_1$  и  $BB_1$  пересекаются на биссектрисе  $CC_1$ , тогда если окружность, проходящая через точки  $A_1, B_1, C_1$  касается стороны  $AB$  и пересекает остальные стороны треугольника  $ABC$  (а не их продолжения), то этот треугольник равнобедренный.*

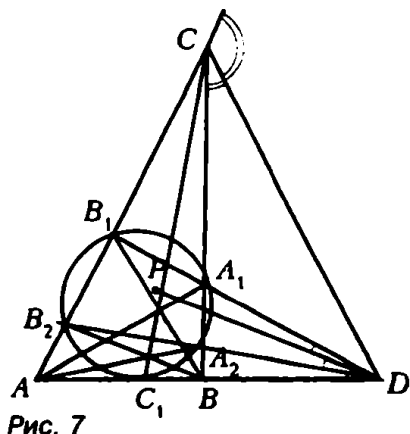


Рис. 7

### Когда выполнены условия теоремы?

Выясним теперь, для каких треугольников окружность, описанная около оснований биссектрис, не пересекает продолжений их сторон. Покажем сначала, что если все углы треугольника  $ABC$  меньше  $120^\circ$ , то треугольник  $A_1B_1C_1$ , вершинами которого являются основания биссектрис треугольника  $ABC$ , остроугольный. Действительно, пусть в треугольнике  $ABC$   $\angle ACB < 120^\circ$ ,  $K, L, M$  — основания перпендикуляров, опущенных из точки  $A_1$  соответственно на прямые  $AC, CC_1, AB$  (рис. 8). Тогда, поскольку  $\angle KCB > 60^\circ$ , а  $\angle C_1CB < 60^\circ$ , то  $\angle KCB > \angle C_1CB$  и  $KA_1 > LA_1$ , но  $KA_1 = MA_1$ , так как  $AA_1$  — биссектриса угла  $CAB$ , поэтому  $MA_1 > LA_1$  и  $\angle CC_1A_1 < \frac{1}{2} \angle CC_1B$ . Аналогично,  $\angle CC_1B_1 < \frac{1}{2} \angle CC_1A$ , откуда

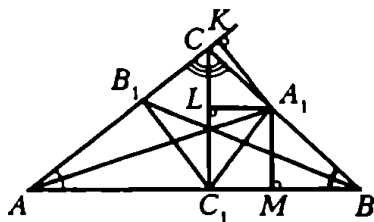


Рис. 8

$\angle B_1C_1A_1 < \frac{1}{2} (\angle CC_1B + \angle CC_1A) = 180^\circ / 2 = 90^\circ$ . Итак, против угла треугольника  $ABC$ , меньшего  $120^\circ$ , лежит острый угол треугольника  $A_1B_1C_1$ .

Поскольку для нетупоугольного треугольника  $ABC$  попарные суммы его углов с одноименными углами треугольника  $A_1B_1C_1$  меньше  $180^\circ$ , то вершины треугольника  $ABC$  лежат вне

описанной окружности треугольника  $A_1B_1C_1$ , т.е. эта окружность не пересекает продолжений сторон треугольника  $ABC$ . Из этого факта и из теоремы 1 следует

**Теорема 2.** *Если окружность, проходящая через основания биссектрис внутренних углов тупоугольного треугольника, касается одной из его сторон, то этот треугольник — равнобедренный.*

Таким образом, неравнобедренный треугольник, у которого указанная окружность касается одной из его сторон, обязательно тупоугольный, причем точка касания лежит на большей стороне.

Окончательно прояснить ситуацию поможет следующий интересный факт, который мы приведем без доказательства<sup>1</sup>: окружность, описанная около оснований биссектрис некоторого треугольника, высекает на прямых, содержащих стороны этого треугольника, такие хорды, что одна из них равна сумме двух других.

Поскольку в нашем случае окружность, описанная около оснований биссектрис треугольника  $ABC$ , касается одной из его сторон, то хорды, высекаемые этой окружностью на двух других сторонах, равны. Предположим сперва, что рассматриваемая окружность не пересекает продолжений сторон треугольника  $ABC$ . Тогда  $A_2A_1 = B_2B_1$  (см. рис. 7) и вписанный четырехугольник  $A_2A_1B_1B_2$  будет равнобокой трапецией.

С другой стороны, из леммы 3 вытекает, что если одна из прямых  $A_1B_1$  и  $A_2B_2$  пересекает прямую  $AB$  в точке  $D$ , то и вторая пересекает  $AB$  в той же точке.

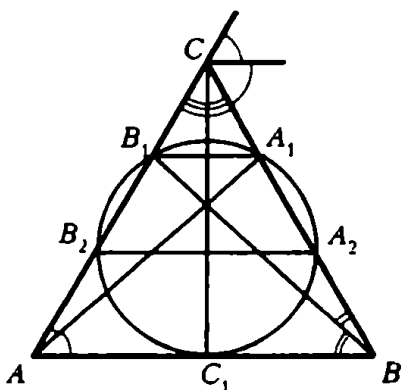


Рис. 9

Прямые  $A_1B_1$  и  $A_2B_2$  параллельны, это означает, что каждая из них в свою очередь параллельна основанию  $AB$  треугольника  $ABC$ . Итак, мы получили, что биссектриса  $CC_1$  проходит через точку пересечения диагоналей трапеции  $ABA_1B_1$ , поэтому точка  $C_1$  совпадает с серединой стороны  $AB$  и треугольник  $ABC$  — равнобедренный (рис. 9).

В этом случае биссектриса  $CC_1$  внутреннего угла при вершине  $C$

<sup>1</sup> Идея доказательства содержится в указании к задаче 198 на с. 153 книги И. Шарыгина «Задачи по геометрии. Планиметрия» (М.: Наука, 1986).

является осью симметрии равнобокой трапеции  $A_2A_1B_1B_2$ , основания которой параллельны биссектрисе внешнего угла при этой вершине.

В случае, когда описанная окружность треугольника  $A_1B_1C_1$  пересекает продолжения сторон треугольника  $ABC$ , картина меняется: хотя вписанный четырехугольник  $A_1A_2B_2B_1$  также будет равнобокой трапецией (в силу равенства диагоналей  $A_1B_2$  и  $B_1A_2$ ), основания этой трапеции параллельны внутренней биссектрисе  $CC_1$ , а осью симметрии трапеции  $A_1A_2B_2B_1$  является внешняя биссектриса  $CD$ . В этом случае внешняя биссектриса  $CD$  может быть непараллельна основанию  $AB$  и поэтому треугольник  $ABC$  не обязательно равнобедренный (рис.10).

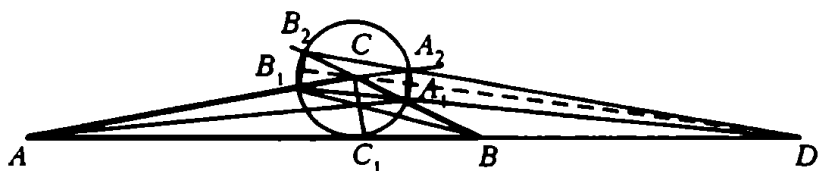


Рис.10

Таким образом, из того, что окружность, описанная около оснований биссектрис нетупоугольного треугольника  $ABC$ , касается одной из его сторон, следует, что этот треугольник равнобедренный. Если же точки  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$  совпадают с основаниями медиан или высот произвольного треугольника  $ABC$ , то из факта касания описанной окружности треугольника  $A_1B_1C_1$  одной из сторон треугольника  $ABC$  вытекает, что треугольник  $ABC$  равнобедренный (как известно, основания медиан и основания высот произвольного треугольника лежат на одной окружности — так называемой окружности девяти точек этого треугольника, поэтому если эта окружность касается одной из сторон треугольника, то одна из его высот совпадает с медианой, т.е. треугольник оказывается равнобедренным).

В связи с этим естественно поставить следующий вопрос. Пусть  $AA_1$ ,  $BB_1$ ,  $CC_1$  — произвольные чевианы треугольника  $ABC$  и окружность, проходящая через точки  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$ , касается одной из сторон этого треугольника. Для каких треугольников  $ABC$  из выполнения данного условия будет следовать их равнобедренность? Мы уже установили, что если точки  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$  совпадают с основаниями высот или медиан произвольного треугольника  $ABC$ , то выполнение указанного условия влечет равнобедренность треугольника. Если же точки  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$  являются основаниями биссектрис треугольника  $ABC$ , то при

выполнении данного условия равнобедренными будут по крайней мере нетупоугольные треугольники  $ABC$ .

Рассмотрим теперь вписанную окружность треугольника  $ABC$ , касающуюся его сторон в точках  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$ . Поскольку  $AB_1 = AC_1$ ,  $BC_1 = BA_1$ ,  $CA_1 = CB_1$ , то

$$\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1,$$

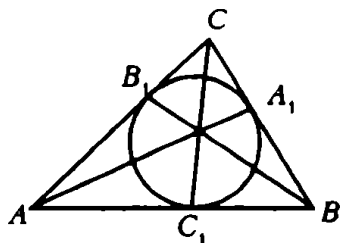


Рис. 11

и по теореме Чевы отрезки  $AA_1$ ,  $BB_1$ ,  $CC_1$  пересекаются в одной точке (рис. 11). Итак, вписанная окружность треугольника  $ABC$  проходит через основания  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$  чевиан  $AA_1$ ,  $BB_1$ ,  $CC_1$  треугольника  $ABC$  и касается

всех его сторон в тех же точках  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$ . Так как вписать окружность можно в любой треугольник, то касание окружности, описанной около оснований чевиан треугольника  $ABC$ , со сторонами этого треугольника может в общем случае не накладывать никаких ограничений на треугольник  $ABC$ .

# О ЗАДАЧЕ МАЛЬФАТТИ

В.Беленький, А.Заславский

Однажды летом в деревне за вечерней беседой мы придумали задачу, постановка которой была очень простой и, как показалось вначале, решение тоже не должно было вызвать особых затруднений. Однако нам потребовалась целая неделя, чтобы справиться с ее решением. Оно оказалось столь изящным, что мы захотели познакомить с ним читателей «Кванта».

Позже мы узнали, что столкнулись с некогда знаменитой, а сейчас почти забытой задачей итальянского математика Мальфатти, опубликованной еще в 1803 году. Вот эта задача.

*Дан треугольник  $ABC$ . Требуется построить три окружности так, чтобы каждая из них касалась двух других окружностей и двух сторон треугольника (рис. 1).*

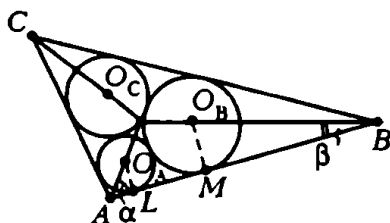


Рис. 1

## Немного истории

Сам Мальфатти опубликовал алгебраическое решение этой задачи без доказательства, сообщив лишь, что полученные им формулы являются результатом весьма сложных и громоздких вычислений.

В 1826 году чисто геометрическое решение задачи Мальфатти (и тоже без доказательства) дал Я.Штейнер — один из крупнейших геометров прошлого века. Затем к ней возвращались не раз. В частности, в 1874 году Шретер дал доказательство решения Штейнера.<sup>1</sup>

---

<sup>1</sup> Эти сведения получены из замечательной книги А.Адлера «Теория геометрических построений», изданной в 1924 году в Одессе издательством «Mathesis».

Из публикаций нашего времени отметим подробное решение задачи Мальфатти в книге Д.О.Шклярского, Н.Н.Ченцова и И.М.Яглома «Избранные задачи и теоремы математики», ч.2 (планиметрия).

Впрочем, занимаясь этой задачей на отдыхе, в отрыве от книг и библиотек, мы всего этого, к счастью, не знали. И вот что мы придумали.

### Первый этап. Редукция к системе уравнений

В треугольнике  $ABC$  на рисунке 1 круги с центрами  $O_A$ ,  $O_B$  и  $O_C$  и радиусами  $r_A$ ,  $r_B$ ,  $r_C$  соответственно удовлетворяют условию задачи.

Существование и единственность решения следуют из очевидных соображений непрерывности. Будем считать, например, круг с центром  $O_A$  ведущим, а два других подстраивать под него, вписывая их в углы  $B$  и  $C$  так, чтобы они касались ведущего. Сначала придадим радиусу  $r_A$  максимально возможное значение, при котором круг становится вписанным в треугольник  $ABC$ , при этом круги с центрами  $O_B$  и  $O_C$  разъединены и их радиусы минимальны. Теперь, как в мультфильме, будем постепенно уменьшать  $r_A$ , приближая центр  $O_A$  к вершине  $A$ ; тогда центры  $O_B$  и  $O_C$  других кругов будут удаляться от своих вершин, двигаясь вдоль биссектрис, а их радиусы будут увеличиваться, т.е. эти круги будут двигаться, сближаясь друг с другом и расширяясь. Ясно, что в какой-то момент они придут в соприкосновение, и этот момент определяется однозначно.

Однако найти радиусы кругов в общем случае не так просто. Чтобы читатель сразу осознал нетривиальность решения, приведем наш ответ. Радиус круга с центром  $O_A$  дается формулой

$$r_A = \frac{S}{p-a} \sin^2(\psi/2 - \varphi_a); \quad (1)$$

здесь, как обычно,  $S$  и  $p = (a + b + c)/2$  — площадь и полупериметр данного треугольника со сторонами  $a$ ,  $b$  и  $c$ , а  $\psi = \varphi_a + \varphi_b + \varphi_c$  — полупериметр сферического треугольника, составленного из дуг больших кругов, равных (в радианном измерении)  $2\varphi_a$ ,  $2\varphi_b$ ,  $2\varphi_c$ , где

$$\begin{aligned} \varphi_a &= \arcsin \sqrt{a/p}, \\ \varphi_b &= \arcsin \sqrt{b/p}, \\ \varphi_c &= \arcsin \sqrt{c/p}. \end{aligned} \quad (2)$$

(Отметим, что  $S/(p-a)$  — это радиус окружности, вневписанной в угол  $A$  треугольника  $ABC$ .)

Выразим условие касания кругов, примыкающих к одной из сторон, например, к стороне  $AB=c$  (рис. 1). Пусть  $L$  и  $M$  — точки касания кругов с центрами  $O_A$  и  $O_B$  с этой стороной. Тогда  $LM = 2\sqrt{r_A r_B}$ .

**Упражнение 1.** Докажите это.

Так как  $AB = AL + LM + MB$ , получаем соотношение ( $\alpha$  и  $\beta$  — половины углов  $A$  и  $B$  соответственно)

$$r_A \operatorname{ctg} \alpha + 2\sqrt{r_A r_B} + r_B \operatorname{ctg} \beta = c. \quad (*)$$

Введем положительные переменные

$$u = \sqrt{r_A \operatorname{ctg} \alpha}, \quad v = \sqrt{r_B \operatorname{ctg} \beta}.$$

Тогда условие  $(*)$  перепишется в виде

$$u^2 + 2uv\sqrt{\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta} + v^2 = c. \quad (**)$$

Из рисунка 2 видно, что

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{r}{p-a}, \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{r}{p-b}.$$

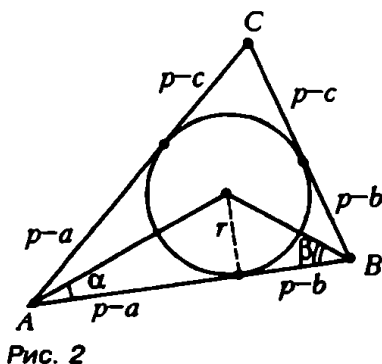


Рис. 2

Вспоминая еще формулы для площади треугольника:  $S = pr$ , где  $r$  — радиус вписанного круга, и

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

(формула Герона), находим

$$\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta = \frac{r^2}{(p-a)(p-b)} = \frac{S^2}{p^2(p-a)(p-b)} = \frac{p-c}{p}.$$

После подстановки в уравнение  $(**)$ , окончательно получаем

$$u^2 + 2uv\sqrt{1 - \frac{c}{p}} + v^2 = c.$$

Введя еще обозначение  $w = \sqrt{r_c \operatorname{ctg} \gamma}$ , где  $\gamma$  — половина угла  $C$ , и записывая аналогичные уравнения для сторон  $b$  и  $c$ ,



приходим к системе уравнений

$$\begin{cases} u^2 + 2uv\sqrt{1 - \frac{c}{p}} + v^2 = c, \\ v^2 + 2vw\sqrt{1 - \frac{a}{p}} + w^2 = a, \\ w^2 + 2wu\sqrt{1 - \frac{b}{p}} + u^2 = b \end{cases} \quad (3)$$

с тремя неизвестными  $u$ ,  $v$ ,  $w$ .

Этим заканчивается *первый этап* решения. Исходная геометрическая задача сведена к алгебраической системе (3), имеющей симметричную циклическую форму. Но как решать эту систему? Прямыми методами, «в лоб», может быть и удастся пробиться, но уж очень громоздко...

### Второй этап. Назад к геометрии

Рассмотрим числа  $u$ ,  $v$ ,  $w$  как длины некоторых отрезков.

Если еще правые части уравнений заменить квадратами «отрезков» длины  $c_* = \sqrt{c}$ ,  $a_* = \sqrt{a}$ ,  $b_* = \sqrt{b}$ , то каждое уравнение будет выглядеть как «теорема косинусов» для некоторого треугольника. Сформулируем по этому поводу простую лемму:

**Лемма 1.** *Для того чтобы из трех отрезков  $x$ ,  $y$ ,  $z$  можно было составить треугольник, необходимо и достаточно, чтобы они были связаны соотношением*

$$x^2 - 2qxy + y^2 = z^2,$$

в котором коэффициент  $q$  удовлетворяет условию  $|q| < 1$ . При этом угол  $\theta$ , противолежащий стороне  $z$ , будет равен  $\theta = \arccos q$ .

**Упражнение 2.** Докажите эту лемму.

Итак, вернемся к нашей системе, которая выглядит теперь так:

$$\begin{cases} u^2 + 2uv\sqrt{1 - \frac{c}{p}} + v^2 = c_*^2, \\ v^2 + 2vw\sqrt{1 - \frac{a}{p}} + w^2 = a_*^2, \\ w^2 + 2wu\sqrt{1 - \frac{b}{p}} + u^2 = b_*^2. \end{cases} \quad (3')$$

Если  $(u, v, w)$  — ее положительное решение, то первое уравнение задает треугольник  $\Delta_c$  со сторонами  $u, v, c_c = \sqrt{c}$  и тупым углом, противолежащим стороне  $\sqrt{c}$ , равным

$$\theta_c = \arccos(-\sqrt{1 - c/p}) = \pi - \varphi_c,$$

где  $\varphi_c = \arccos \sqrt{1 - c/p} = \arcsin \sqrt{c/p}$  (поскольку  $\sin^2 \varphi_c + \cos^2 \varphi_c = 1$ ).

По теореме синусов, радиус круга, описанного около треугольника  $\Delta_c$ , равен

$$R = c_c / 2 \sin \theta_c = \sqrt{p}/2. \quad (4)$$

Аналогично определяются треугольники  $\Delta_a$  и  $\Delta_b$ , задаваемые вторым и третьим уравнениями системы (3'), и углы  $\theta_a = \pi - \varphi_a$ ,  $\theta_b = \pi - \varphi_b$ . Замечательно, что  $R$  не зависит от  $c$ . Так что мы доказали следующую основную для дальнейшего лемму:

**Лемма 2.** Радиусы описанных окружностей всех трех треугольников  $\Delta_a, \Delta_b, \Delta_c$  равны  $R = \sqrt{p}/2$ .

### Упражнения

3. Докажите, что отрезки с длинами  $a_c = \sqrt{a}$ ,  $b_c = \sqrt{b}$ ,  $c_c = \sqrt{c}$  всегда образуют остроугольный треугольник  $\Delta$ .

4. Докажите, что  $\varphi_a + \varphi_b + \varphi_c < \pi$ , а  $\theta_a + \theta_b + \theta_c > 2\pi$ , и следовательно, из треугольников  $\Delta, \Delta_a, \Delta_b, \Delta_c$  нельзя сложить тетраэдр.

На этом заканчивается *второй этап* решения.

### Третий, заключительный этап

По лемме 2, все три треугольника  $\Delta_a, \Delta_b, \Delta_c$  могут быть вписаны в круг радиусом  $R = \sqrt{p}/2$ , и мы будем рассматривать все отрезки —  $u, v, w, a_c, b_c, c_c$  как хорды этого круга. Заменим их соответствующими дугами  $\hat{u}, \hat{v}, \hat{w}, \hat{a}_c, \hat{b}_c, \hat{c}_c$ . Под дугой, соответствующей хорде  $x$ , мы понимаем *меньшую* из дуг, стягиваемых этой хордой. Пусть  $\hat{x}$  — угловая мера такой дуги. Тогда, очевидно,  $x = 2R \sin \frac{\hat{x}}{2}$ , а  $\hat{x} = 2 \arcsin \frac{x}{2R}$ . Вписывая тупоугольные треугольники  $\Delta_a, \Delta_b, \Delta_c$  в круг с радиусом  $R$ , увидим, что

$$\begin{aligned} \hat{u} + \hat{v} &= \hat{c}_c = 2\varphi_c, \\ \hat{v} + \hat{w} &= \hat{a}_c = 2\varphi_a, \\ \hat{w} + \hat{u} &= \hat{b}_c = 2\varphi_b. \end{aligned} \quad (5)$$

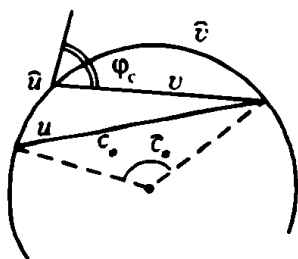


Рис. 3

Итак, от системы квадратных уравнений (3) введением новых переменных  $\hat{u}$ ,  $\hat{v}$ ,  $\hat{w}$  мы перешли к системе линейных уравнений!

*Замечание.* В соотношениях (5) мы уверенно пишем знак +, поскольку треугольник  $\Delta_c$  — тупоугольный с тупым углом  $\theta_c = \pi - \varphi_c$  против стороны  $c$ . (рис.3).

Сложив эти три уравнения, получаем

$$\begin{aligned}\hat{u} &= \psi - \hat{a}_*, \\ \hat{v} &= \psi - \hat{b}_*, \\ \hat{w} &= \psi - \hat{c}_*,\end{aligned}\tag{6}$$

где  $\psi = \varphi_a + \varphi_b + \varphi_c$  — «полупериметр» «треугольника», составленного из дуг  $\hat{a}_*$ ,  $\hat{b}_*$ ,  $\hat{c}_*$ .

Осталось записать ответ. Имеем

$$u = 2R \sin \frac{\hat{u}}{2} = \sqrt{p} \sin \frac{\hat{u}}{2},$$

но тогда  $r_A = u^2 \operatorname{tg} \alpha = \frac{pr}{p-a} \sin^2 \frac{\hat{u}}{2}$ , т.е.

$$\begin{aligned}r_A &= \frac{S}{p-a} \sin^2 \frac{\psi - \hat{a}_*}{2}, & r_B &= \frac{S}{p-b} \sin^2 \frac{\psi - \hat{b}_*}{2}, \\ r_C &= \frac{S}{p-c} \sin^2 \frac{\psi - \hat{c}_*}{2}.\end{aligned}\tag{7}$$

Напомним, что здесь  $\hat{a}_*/2$ ,  $\hat{b}_*/2$ ,  $\hat{c}_*/2$  — это арксинусы  $\sqrt{a/p}$ ,  $\sqrt{b/p}$ ,  $\sqrt{c/p}$ ;  $\psi$  — их сумма.

Итак, мы решили систему (3). Однако исходная задача была сформулирована как задача на построение. Что же, полученные формулы (7) позволяют построить отрезки  $r_A$ ,  $r_B$  и  $r_C$  циркулем и линейкой.

Единственное, что здесь может вызвать сомнение — это появление в наших формулах таких величин, как  $\sqrt{a}$ ,  $\sqrt{p}$ . Однако его нетрудно рассеять. Достаточно взять произвольный отрезок  $e$  в качестве единицы длины. Тогда  $a_* = \sqrt{ae}$ ,  $p_* = \sqrt{pe}$ ,  $R = p_*/2$  будут уже настоящими отрезками (а угловые величины дуг — арксинусы их отношений — уже не зависят от выбора единичного отрезка  $e$ ).

**Упражнение 5.** Опишите построение отрезков с помощью циркуля и линейки по формулам (7).

Конечно, от формул (7) можно перейти к обычным алгебраическим формулам, содержащим вместо тригонометрических функций довольно громоздкие радикалы.

**Упражнение 6** (для любителей алгебры). Напишите такие выражения и попробуйте проверить, что они дают решение системы (3). (Конечно, зная ответ, можно попробовать решить систему (3) чисто алгебраически и прийти к этим формулам.)

Вместо «лобового» построения отрезков  $r_A, r_B, r_C$  по формулам можно предложить и более изящное. Вспомним геометрическую интерпретацию решения (6) линейной системы трех уравнений (5) (рис. 2): треугольник с длинами сторон  $a, b, c$ , величины  $p - a, p - b, p - c$  — это отрезки сторон от вершин до точек касания со вписанной окружностью. Этот факт, основанный только на соображениях симметрии, верен и для криволинейного «треугольника», стороны которого  $\hat{a}, \hat{b}, \hat{c}$  — дуги одного радиуса; на этом основано следующее построение (рис. 4).

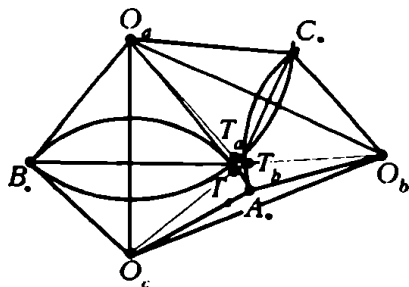


Рис. 4

Пусть на сторонах  $a, b, c$  треугольника  $\Delta = A B C$ , как на хордах, построены сегменты с радиусами  $R = \sqrt{p}/2$ , обращенные внутрь  $\Delta$ ;  $O_a, O_b, O_c$  — центры соответствующих кругов. Тогда центр  $Q$  описанного круга треугольника  $O_a O_b O_c$  будет также центром «вписанного» круга, касающегося дуг сегментов (в точках  $T_a, T_b, T_c$ , лежащих на пересечении дуг с отрезками  $QO_a, QO_b, QO_c$ ), а расстояния от этих точек касания до концов дуг равны  $u, v, w$ :

$$\begin{aligned} A T_b &= A T_c = u, \\ B T_a &= B T_c = v, \\ C T_b &= C T_a = w. \end{aligned} \quad (8)$$

**Упражнение 7.** Докажите правильность этого построения и его осуществимость (т.е. факт, что  $Q$  лежит вне секторов  $O_a A B$ ,  $O_b B C$ ,  $O_c A C$ ).

Можно пойти дальше: выйти в пространство и составить из трех секторов рисунка 4, сведя их центры  $O_a$ ,  $O_b$ ,  $O_c$  в одну точку  $O$ , трехгранный угол — тогда три дуги секторов станут сторонами криволинейного треугольника  $\Delta$ , лежащего на сфере радиусом  $R$  с центром  $O$ ; при этом их точки  $T_a$ ,  $T_b$ ,  $T_c$  будут точками касания вписанного в  $\Delta$  круга (рис. 5). Если вершины  $\Delta$  обозначить, как и на рисунке 3, через  $A$ ,  $B$  и  $C$ , то будут по-прежнему верны равенства (8).

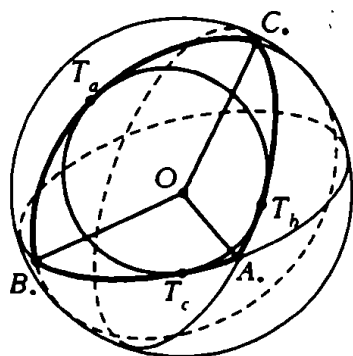


Рис. 5

Разумеется, углы секторов на рисунке 4, как и плоские углы трехгранного угла с вершиной  $O$ , равны  $\angle AOB = 2\varphi_c$ ,  $\angle BOC = 2\varphi_a$ ,  $\angle COA = 2\varphi_b$ .

**Упражнение 8.** Докажите, что каждый из трех углов  $\varphi_a$ ,  $\varphi_b$ ,  $\varphi_c$  меньше суммы двух других и, значит (с учетом упражнения 4), из углов  $2\varphi_a$ ,  $2\varphi_b$ ,  $2\varphi_c$  можно составить трехгранный угол.

Теперь мы объяснили слова «сферический треугольник», появившиеся в ответе (1), (2), анонсированном в начале статьи.

На этом можно было бы поставить точку. Но, оказывается, в сферической интерпретации можно обнаружить более глубокие связи с системой уравнений (3) и породившей ее задачей Мальфатти. Мы ограничимся здесь некоторыми наблюдениями и оставляем читателям возможность подумать над ними, не формулируя точных теорем и упражнений (тем более что некоторые из поставленных вопросов далеко не просты).

Заметим, что плоскости построенного нами трехгранного угла с центром  $O$  делят сферу на 8 треугольников: один из них — это наш  $\Delta = ABC$ , три других примыкают к нему по сторонам (а еще четыре симметричны относительно точки  $O$ ). Расстояния от точек касания вписанной окружности до вершин на соответствующих сторонах по дугам равны  $\hat{u} = \psi - \hat{a}$ ,  $\hat{v} = \psi - \hat{b}$ ,  $\hat{w} = \psi - \hat{c}$ , а соответствующие им расстояния «по хордам» дают, как мы знаем, тройку  $(u, v, w)$  положительных решений системы (3). Легко найти и «дуговые» расстояния от вершин  $A$ ,  $B$ ,  $C$  до точек касания с окружностями, вписанными в три соседние с  $\Delta$  треугольника (подобно тому, как находятся расстояния от вершин обычного треугольника с точ-

ками касания вневписанных окружностей, рис.6): они составляют три тройки

$$(\psi, \psi - \hat{a}_*, \psi - \hat{b}_*), (\psi - \hat{c}_*, \psi, \psi - \hat{a}_*),$$

$$(\psi - \hat{b}_*, \psi - \hat{c}_*, \psi).$$

Вернемся к системе уравнений (3). Она может иметь максимум 8 решений; оказывается, они действительно существуют, причем, кроме  $(u, v, w)$ , еще три решения имеют вид

$$(-z, u, v), (w, -z, u), (v, w, -z), \quad (9)$$

где  $\hat{z} = \psi$ , т.е. соответствуют тройкам расстояний «по хордам» до точек касания — только расстояние до «далекой» точки  $z$  берется со знаком минус (а еще четыре решения получаются из этих сменой знаков).

Не правда ли, в формулах (9) заложена впечатляющая циклическая симметрия! Можно ли заподозрить что-либо подобное в такой, например, системе:

$$\begin{cases} u^2 + \frac{6}{7} \cdot uv + v^2 = 40, \\ v^2 + \frac{4}{7} \cdot vw + w^2 = 45, \\ w^2 + \frac{12}{7} \cdot wu + u^2 = 13? \end{cases}$$

(Проверьте, что она имеет канонический вид (3), или попытайтесь решить ее, не применяя нашего метода. Кстати, стороны треугольника  $ABC$  на рисунке 1 примерно соответствуют правым частям этой системы.)

Заметим здесь, что наш метод может быть применен к системе вида (3), в которой параметр  $p$  не обязан быть полупериметром, а может быть произвольным числом, при котором система имеет смысл, т.е.  $p > \max(a, b, c)$ ; в свою очередь, правые части не обязаны быть сторонами треугольника. (Если все же  $p$  — полупериметр, то выполняется соотношение  $\cos^2 \varphi_a + \cos^2 \varphi_b + \cos^2 \varphi_c = 1$ , которое означает, что  $\varphi_a, \varphi_b, \varphi_c$  можно рассматривать как углы, образованные некоторым вектором в пространстве с осями декартовой системы координат. Мы эту возмож-

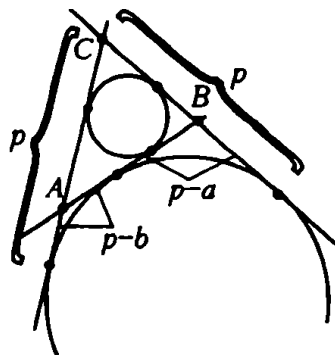
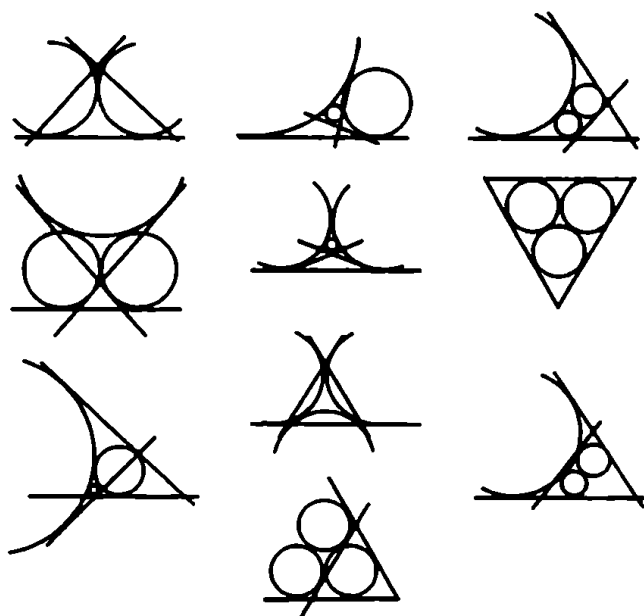


Рис. 6

ность не использовали, но, может быть, она открывает какие-то новые подходы.)

Но и это еще не все! Каждое из решений (9), оказывается, тоже имеет интерпретацию в терминах исходной задачи Мальфатти. В первоначальном ее понимании мы подразумевали, что круги лежат внутри треугольника и, если считать их обращенными «лицом к вершинам», касаются друг друга «затылками». Но можно рассмотреть и случай, когда (касаясь тех же сторон или их продолжений) круги касаются друг друга «лбами»; и оказывается, что для вычисления их радиусов в этом случае нужны как раз «побочные» решения (9) системы (3). (При этом в соотношении (\*), с которого начался вывод уравнения (\*\*) системы, некоторые отрезки надо брать со знаком минус.)

Впрочем, задача Мальфатти в самом общем виде: *найти тройку кругов, в которой каждая пара касается друг друга и одной из трех данных прямых*, — имеет значительно больше решений, так что для их описания понадобится не одна, а несколько систем, подобных (3). Попробуйте выяснить, сколько же всего решений у этой задачи, как их разумно расклассифицировать. Мы попросили художника построить на компьютере столько различных схем расположения этих кругов, сколько сможет поместиться на оставшейся части страницы, но все ли случаи здесь показаны, решать вам.



# ОДНОЙ ЛИНЕЙКОЙ

Ю. Михеев

Дан конечный набор точек, линейка и карандаш. Какие новые точки можно тогда построить?

Уточним постановку задачи. Точку будем считать *построенной*, если она одна из данных или является пересечением двух построенных прямых; в свою очередь, прямую будем считать *построенной*, если она проходит через построенные (в частности, данные) точки. Общая задача состоит в том, чтобы *описать множество точек, которые можно построить исходя из данного конечного набора точек*.

Ясно, что если даны одна, две или три точки, никаких новых точек построить нельзя (рис.1); если даны четыре точки, какие-то три из которых (или все четыре) лежат на одной прямой, тоже, очевидно, никаких новых точек построить нельзя (рис.2); если, наконец, даны четыре точки, лежащие в вершинах параллелограмма, можно построить только одну точку — его центр (рис.3).

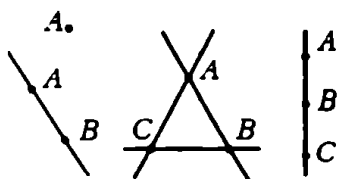


Рис. 1

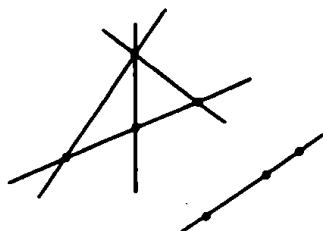


Рис. 2

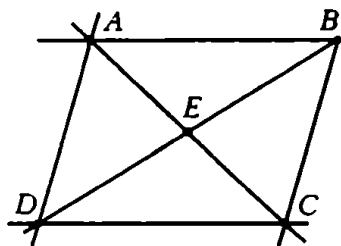


Рис. 3

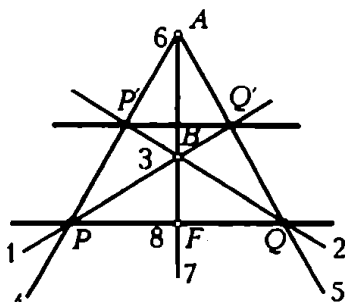


Рис. 4



Пусть теперь даны четыре точки, не образующие вершины параллелограмма и такие, что никакие три из них не лежат на одной прямой. Для краткости будем здесь говорить, что такие точки находятся в *общем положении*.

Рассмотрим сначала частный случай: данные точки  $P, Q, P', Q'$  лежат в вершинах трапеции (рис. 4). В первых шести задачах эта конфигурация считается заданной.

**Задача 1.** Разделите отрезок  $PQ$  пополам.

Решение показано на рисунке 4. На нем черными изображены данные точки  $P, Q, P', Q'$  и более жирно выделены параллельные прямые  $PQ, P'Q'$ , дальнейшие построения выполнены тонкими линиями, причем номерами указан порядок проведения прямых.

**Задача 2.** Удвойте отрезок  $P'Q'$ .

Решение показано на рисунке 5; на нем черным изображена и уже построенная точка  $F$  — середина  $PQ$ . Равенство  $P'Q' = Q'R'$  следует из подобия треугольников  $\triangle PMF \sim \triangle R'MQ'$ ,  $\triangle FMQ \sim \triangle Q'MP'$  и равенства  $PF = FQ$ .

**Задача 3.** Постройте отрезок длиной  $n \cdot P'Q'$ .

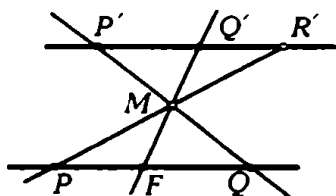


Рис. 5

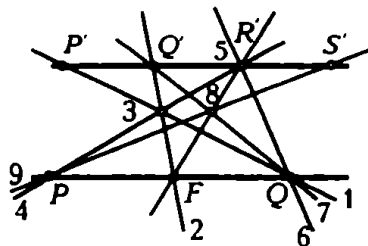


Рис. 6

Для этого нужно просто  $n - 1$  раз повторить процедуру, использованную в предыдущей задаче. На рисунке 6 построение показано для  $n = 3$ .

Разумеется, аналогично на прямой  $PQ$  можно построить отрезок длины  $m \cdot PQ$ .

**Задача 4.** Разделите отрезок  $P'Q'$  на  $t$  равных частей.

**Решение.** Сначала на прямой  $PQ$  строим  $t - 1$  равных отрезков  $PQ_2, Q_2Q_3, \dots, Q_{m-1}Q_m$ . Затем строим прямые  $PP'$  и  $Q_mQ'$  и соединяем их точку пересечения  $A$  с точками  $Q_2, Q_3, \dots, Q_{m-1}$ . Полученные  $t - 1$  прямых делят  $P'Q'$  на  $t$  равных частей. Для  $t = 4$  конструкция показана на рисунке 7.

(Заметим, что конструкция не проходит, если  $PP' \parallel Q_mQ'$ . Но эту трудность легко обойти: можно сначала удвоить  $PQ$ , затем построить  $m$  отрезков, равных удвоенному отрезку, и далее

повторить указанное в предыдущем абзаце построение.)

Для дальнейшего нам придется предположить, что данные точки  $F, Q, P', Q'$  — рациональные, т.е. имеют рациональные координаты относительно некоторой системы координат.

**Задача 5.** Постройте произвольную рациональную точку  $S$  на прямой  $PQ$ .

**Решение.** Для рациональных точек  $P, Q, S$  отношение  $PS:PQ$  рационально (докажите!), и значит,  $PS = \frac{m}{n} PQ$ , где  $m, n \in \mathbb{N}$ . Поэтому достаточно разделить отрезок  $PQ$  на  $n$  равных частей и  $m$  раз отложить от точки  $P$  полученный отрезок.

Точно так же можно построить любую рациональную точку  $T \in P'Q'$ .

**Задача 6.** Постройте произвольную рациональную точку  $T$  на плоскости.

**Решение.** Допустим, точка  $T$  уже построена. Проведем прямые  $TP'$  и  $TQ'$ ; они пересекут<sup>1</sup>  $PQ$  в точках  $E$  и  $F$ . Так как прямые  $TP', TQ', PQ$  рациональны (т.е. записываются в виде линейных уравнений с рациональными коэффициентами), координаты точек  $E$  и  $F$  получаются как решения систем линейных уравнений с рациональными коэффициентами и поэтому тоже рациональны. Умея строить  $E$  и  $F$ , мы построим и точку  $T$ .

Итак, отправляясь от трапеции с рациональными вершинами, можно построить вообще любую рациональную точку! Естественно спросить — а какие еще точки можно построить? Оказывается — никаких.

**Задача 7.** Докажите, что любая точка, построенная одной линейкой из набора рациональных точек, рациональна.

Действительно, прямая, проходящая через рациональные точки, рациональна и точка пересечения рациональных прямых (как решение системы линейных уравнений с рациональными коэффициентами) тоже рациональна.

Пусть теперь  $A, B, C, D$  — четыре рациональные точки, находящиеся в общем положении. Вы, наверное, угадали, какие точки можно построить исходя из точек  $A, B, C, D$  — конечно

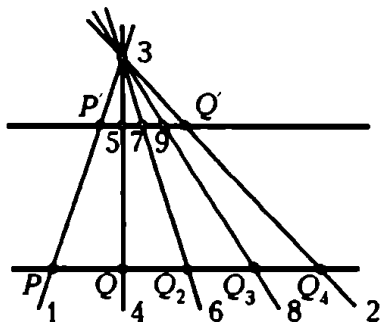


Рис. 7

<sup>1</sup> В противном случае  $T$  лежит на прямой  $P'Q'$ , а этот случай уже разобран.

же, как и в предыдущем случае, *все рациональные*. Более того, ясно, как можно постараться закончить доказательство этого факта: достаточно получить две параллельные прямые. Но это как раз самая трудная часть наших построений.

По условию точки  $A, B, C, D$  либо образуют выпуклый четырехугольник, отличный от параллелограмма, либо одна из точек находится внутри треугольника, образованного остальными

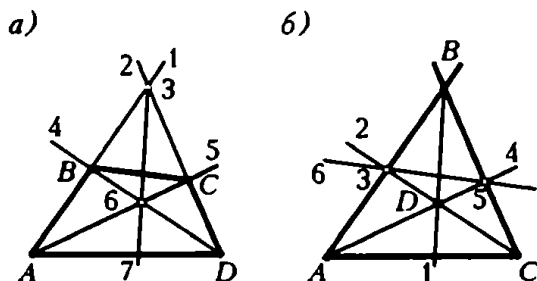


Рис. 8

ми тремя точками. Проведя в каждом из этих случаев прямые, как на рисунках 8, а, б, получим одинаковые конфигурации. Поэтому введем новые обозначения (см. рисунок 9, на котором

данные и построенные точки не различаются).

Впрочем, из наших условий не следует, что прямые  $EF$  и  $MN$  пересекаются: они могут быть и параллельными. Когда же это произойдет?

**Задача 8.** Докажите, что если  $MK = KN$ , то  $MN \parallel EF$ .

**Решение** легко получить, если вспомнить решение задачи 2.

**Задача 9.** В случае, когда  $MK = 2KN$ , постройте прямую, параллельную  $MN$ .

**Решение.** Сперва докажем, что в нашем случае  $MN = NL$ . Для этого нам придется применить теоремы Чева и Менелая. Первая из этих теорем утверждает, что если вершины треугольника  $EFK$  (рис.9) лежат соответственно на прямых  $MS, SN, NM$ , то

$$\frac{MK}{KN} \cdot \frac{NF}{FS} \cdot \frac{SE}{EM} = 1. \quad (1)$$

Вторая утверждает, что если точки  $E, F, L$  лежат соответственно

на прямых  $SM$ ,  $SN$ ,  $MN$  и расположены на одной прямой, то

$$\frac{ML}{LN} \cdot \frac{NF}{FS} \cdot \frac{SE}{EM} = 1. \quad (2)$$

Сопоставляя равенства (1) и (2), получаем:  $ML = 2NL$ , откуда  $MN = NL$ . А теперь построение параллельной прямой легко получается известным нам, в сущности, способом (рис.10).

**Задача 10.** В случае, когда  $2MK = 3KN$ , постройте прямую, параллельную  $MN$ .

**Указание.** Покажите, что  $MN = 2NL$  (см. рис.9), и примените задачу 9.

**Задача 11.** Постройте прямую, параллельную прямой  $MN$ , в общем случае.

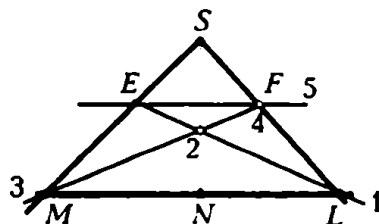


Рис.10

**Решение** нам подсказывают предыдущие задачи. Пусть  $MK : KN = p : q$ , где  $p > q$  (случай  $p < q$  сводится к этому переименованием точек). Рассуждать мы будем индукцией по  $l$ . Базис индукции, т.е. случай  $l = 1$ , уже разобран (задача 8). Предположим, что при  $p, q \leq l$  мы умеем по точкам  $M, K, L$  строить прямую, параллельную  $MN$ . Пусть теперь  $MK : KN = (l + 1) : q$ . Сопоставляя (1) и (2), получаем

$$\frac{MN}{ML} = \frac{l+1-q}{q},$$

и можно воспользоваться предположением индукции, согласно которому по точкам  $M, N, L$  можно построить прямую, параллельную прямой  $MN$ .

Таким образом, мы доказали следующую замечательную теорему:

**Теорема.** Множество точек, которые можно построить одной линейкой из четырех рациональных точек, находящихся в общем положении, состоит из всех рациональных точек плоскости.

Очевидно, увеличение числа исходных рациональных точек не меняет множества точек, которые можно построить.

Наверное, читателю хотелось бы узнать, какие точки можно построить исходя из четырех точек в общем положении, не все координаты которых рациональны. К сожалению, чтобы хорошо и точно сформулировать ответ, необходимо привлечь понятия из проективной геометрии. Однако интуитивно ясно, что в указан-

ном случае получается множество точек, очень «похожее» на множество всех рациональных точек. Если говорить более точно, то данное множество «проективно-эквивалентно» множеству рациональных точек.

### Упражнения

1. С помощью циркуля и линейки, исходя из четырех точек в общем положении, постройте точку, которую нельзя построить одной линейкой (циркулем разрешается строить окружность с центром  $A$  и радиусом  $AB$ , где  $A, B$  — построенные точки; точки пересечения построенной окружности с построенной прямой считаются построенными).

2. Даны три точки  $O, A, B$  и две параллельные прямые  $l, m$ , причем  $A, B \in l$  и  $O \notin l, O \notin m$ . Постройте одной линейкой

а) прямую, проходящую через  $O$  параллельно  $l$ ;

б) прямую, проходящую через  $A$  параллельно  $OB$ .

3\*. Даны пять точек  $(0,0), (1,0), (1,1), (0,2), (\sqrt{3},0)$ . Какие точки можно из них построить одной линейкой?

# ПОСТРОЕНИЯ ОДНИМ ЦИРКУЛЕМ

Д. Фукс

Среди бесчисленных задач на построение встречаются такие, в которых построение требуется произвести одной линейкой или одним циркулем. Однако давно известно, что отсутствие линейки не сужает круга возможных построений: *всякое построение, выполнимое циркулем и линейкой, можно проделать одним циркулем.*

Идея о построении с помощью одного циркуля была выдвинута еще итальянским ученым Джованни Баттиста Бенедетти (1530 — 1590). В 1672 году появилась книга «Euclidus Danicus» датского геометра Георга Мора (1640 — 1697). В ней он показал, что все задачи, которые сводятся к квадратным уравнениям, можно решить геометрически с помощью одного циркуля. Более чем через 100 лет, в 1797 году, эта задача была вновь поставлена и решена итальянцем Лоренцо Маскерони (1750 — 1800). Соответствующее утверждение называют теперь *теоремой Мора — Маскерони*. В этой заметке мы приведем доказательство этой теоремы.

Во всех решаемых ниже задачах на построение мы ограничиваемся описанием самого построения, предоставляя читателю самостоятельно доказать, что построение приводит к желаемой цели. Впрочем, доказательства приведены в конце книги.

## Формулировка результата

Разумеется, нельзя провести циркулем прямую, поэтому все рассматриваемые задачи на построение должны состоять в построении некоторой точки (на плоскости).

**Теорема.** *Предположим, что точка  $M$  может быть построена по точкам  $A_1, \dots, A_n$  при помощи циркуля и линейки. Тогда точка  $M$  может быть построена по точкам  $A_1, \dots, A_n$  при помощи одного циркуля.*

Чтобы доказать эту теорему, посмотрим, какие построения производятся линейкой. С помощью линейки можно провести через две данные точки прямую и найти ее точки пересечения с

ранее построенными прямыми и окружностями. Но так как с самого начала нам были даны только точки, всякая ранее построенная прямая была некогда проведена через две еще ранее построенные точки, и всякая ранее построенная окружность имеет своим центром ранее построенную точку. Таким образом, в процессе построения линейка применяется только к решению одной из двух следующих задач.

**Задача 1.** По данным точкам  $A, B, C, D$  найти точку пересечения прямых  $AB$  и  $CD$ .

**Задача 2.** По данной окружности с данным центром  $O$  и данным точкам  $A$  и  $B$  найти точки пересечения окружности  $S$  с прямой  $AB$ .

Наша теорема будет доказана, если мы установим, что обе эти задачи могут быть решены при помощи одного циркуля.

### Вспомогательные построения

В этом и следующем пунктах, говоря «построение», мы подразумеваем построение одним циркулем. Мы начнем с решения четырех вспомогательных задач.

**Задача 3.** Даны (различные) точки  $A$  и  $B$ . Постройте на луче  $AB$  точку  $C$  такую, что  $AC = 2AB$ .

**Построение** (рис.1). Проведем через точку  $A$  окружность с центром  $O$ . На этой окружности трижды отложим отрезок  $AB$ , начиная от точки  $A$ . Получившаяся при третьем откладывании точка  $C$  удовлетворяет требованиям задачи.

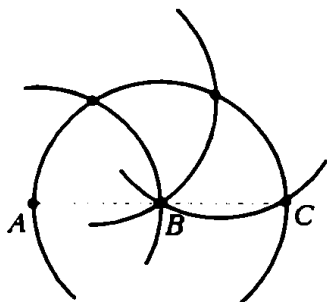


Рис. 1

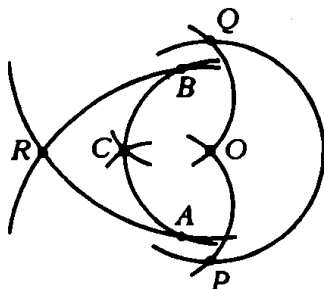


Рис. 2

**Задача 4.** Дана окружность с центром  $O$  и дуга  $AB$  на ней. Постройте точку, делящую эту дугу пополам.

**Построение** (рис.2). Через точку  $O$  проведем окружности с центрами  $A$  и  $B$ . Проведем окружность с центром  $O$  и радиусом  $AB$ . Возьмем две точки:  $P$  и  $Q$  — точки пересечения этой окружности с двумя построенными; тогда дуги  $OP$  и  $OQ$  равны

дуге  $AB$ . Затем через точки  $B$  и  $A$  проведем окружности с центрами  $P$  и  $Q$  до их пересечения в точке  $R$ . Наконец, радиусом  $OR$  проведем окружность с центром  $P$  или  $Q$ . Точка  $C$  пересечения этой окружности с дугой  $AB$  и будет искомой.

**Задача 5.** Дана окружность  $S$  с центром  $O$  и точка  $P \neq O$ . На луче  $OP$  постройте точку  $P'$  такую, что  $OP \cdot OP' = r^2$ , где  $r$  — радиус окружности  $S$ .

(Такая точка  $P'$  называется симметричной точке  $P$  относительно окружности  $S$ .)

**Построение. Случай 1.** Точка  $P$  лежит вне окружности  $S$  (рис.3). Проведем через точку  $O$  окружность с центром  $P$ . Пусть  $Q$  и  $R$  — точки ее пересечения с окружностью  $S$ . Проведем через точку  $O$  окружности с центрами  $Q$  и  $R$ . Отличная от  $O$  точка пересечения этих окружностей и есть искомая точка  $P'$ .

(Это построение проходит и в случае, когда точка  $P$  лежит внутри окружности  $S$ , но находится от ее центра  $O$  на расстоянии, большем  $r/2$ .)

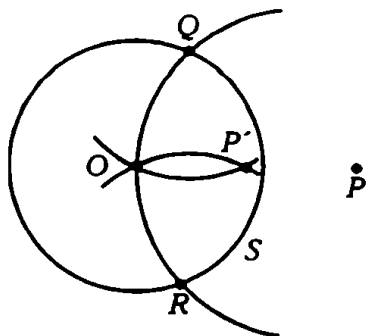


Рис. 3

**Случай 2.** Точка  $P$  лежит внутри окружности  $S$ . Пользуясь построением задачи 3, мы последовательно строим на луче  $OP$  точки  $P_2, P_3, \dots$  такие, что  $OP_2 = 2OP$ ,  $OP_3 = 3OP$ , ..., пока не дойдем до точки  $P_n$ , которая будет лежать вне  $S$ . Для точки  $P_n$  мы строим симметричную относительно окружности  $S$  точку  $P'_n$ , пользуясь предыдущим построением. Наконец, на луче  $OP'_1$  (т.е. на луче  $OP$ ) мы строим точки  $P'_2, P'_3, \dots$  такие, что  $OP'_2 = 2OP'_1$ ,  $OP'_3 = 3OP'_1$ , ... Точка  $P'_n$  и будет искомой.

**Задача 6.** Даны окружность  $S$  с центром  $O$  и несовпадающие точки  $A, B$ . Постройте окружность, проходящую через точку  $O$  и точки пересечения прямой  $AB$  с окружностью  $S$  (в предположении, что прямая  $AB$  не проходит через центр окружности  $S$  и пересекает ее в двух точках). Докажите, что эта окружность, за вычетом точки  $O$ , представляет собой геометрическое место точек, симметричных точкам прямой  $AB$  относительно окружности  $S$ .

**Построение (рис.4).** Проведем через точку  $O$  окружности с центрами  $A$  и  $B$ . Точку их пересечения, отличную от  $O$ , обозначим через  $P$ . Построим точку  $P'$ , симметричную точке  $P$  относительно окружности  $S$  (задача 5), и построим окружность с



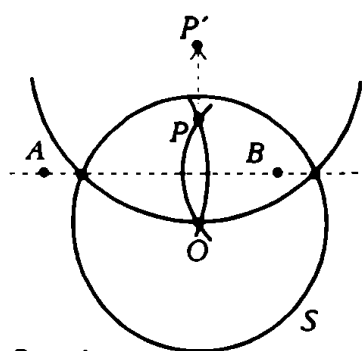


Рис. 4

центром  $P'$ , проходящую через  $O$ . Это и есть искомая окружность.

### Основные построения

**Построение к задаче 2.** Если точка  $O$  не лежит на прямой  $AB$ , проходит построение задачи 6 и даже его упрощенный вариант: мы строим точку  $P$ , как в задаче 6, и затем проводим окружность с центром  $P$  радиусом, равным радиусу окружности  $S$  (зная центр окружности  $S$ ,

мы можем радиус окружности измерить циркулем); точки пересечения построенной окружности с данной окружностью — искомые точки. Если точка  $O$  лежит на прямой  $AB$ , то это построение не пройдет: точка  $P$  сольется с точкой  $O$ . Тогда мы применяем другое построение (рис.5): с центром  $A$  (или с центром  $B$ , если  $A = O$ ) проводим произвольную окружность, пересекающую окружность  $S$  в двух точках, обозначаем точки пересечения через  $C$  и  $D$  и делим дуги  $CD$  и  $DC$  окружности  $S$  пополам (задача 4). Точки деления и будут искомыми.

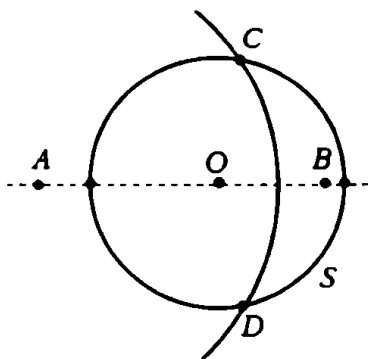


Рис. 5

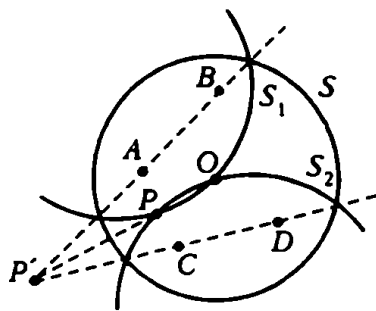


Рис. 6

**Построение к задаче 1** (рис.6). Построим произвольную окружность  $S$ , внутри которой содержатся все данные точки и центр  $O$  которой не лежит ни на одной из прямых  $AB$  и  $CD$ . (Это легко сделать «на глазок», но для «строного построения» такой рецепт не годится. Можно поступить так: построить произвольную окружность, найти, пользуясь построением задачи 2, точки ее пересечения с прямыми  $AB$  и  $CD$  и взять в качестве  $O$  точку построенной окружности, отличную от найденных точек.) Затем, пользуясь построением задачи 6, строим окружность  $S_1$ ,

проходящую через  $O$  и через точки пересечения окружности  $S$  с прямой  $AB$ , и окружность  $S_2$ , проходящую через  $O$  и через точки пересечения окружности  $S$  с прямой  $CD$ . Затем мы обозначаем через  $P$  точку пересечения окружностей  $S_1$  и  $S_2$ , отличную от  $O$ , и строим точку  $P'$ , симметричную точке  $P$  относительно окружности  $S$ . Это и есть искомая точка.

### Заключительные замечания

1. Если данные задачи на построение включают в себя не только точки, линейка может оказаться для ее решения необходимой. Например: даны кривая  $c$  и точки  $A, B$ ; нужно найти точки пересечения кривой  $c$  с прямой  $AB$ . Это, вообще говоря, нельзя сделать без линейки. Однако бывает, что подобные задачи сводятся к задачам рассмотренного типа и решаются одним циркулем. Например: на плоскости нарисована окружность; требуется, пользуясь одним циркулем, найти ее центр. Это можно сделать так: отметим на окружности три точки  $A, B, C$ ; как известно, циркулем и линейкой можно построить центр окружности, описанной около треугольника  $ABC$ ; значит, это можно сделать и одним циркулем. (Впрочем, задача имеет гораздо более простое решение — найдите его!) Мы видим, кстати, что в задачах 2, 4, 5 и 6 не обязательно было указывать центр заданной окружности.

2. Одной линейкой можно проделать не всякое построение, выполнимое циркулем и линейкой. (Доказательство см. в книге: Радемахер Г., Теплиц О. Числа и фигуры. — М.: Наука, 1966.) Существует, однако, поразительная теорема Штейнера, согласно которой все построения, выполнимые циркулем и линейкой, могут быть проделаны одной линейкой, если на листе предварительно нарисована окружность и отмечен ее центр.

А.Лопшиц

На этом занятии математического кружка мы научимся решать геометрические задачи определенного типа — так называемые *аффинные задачи*. Мы не будем предварительно объяснять, что это за задачи. Надеемся, что прочитав статью, вы поймете это.

## Аффинная версия теоремы Морлея

В статье Г.Тонояна и И.Яглома «Теорема Морлея» (с. 16 настоящего сборника) рассматривалась следующая замечательная теорема: *если в треугольнике ABC провести трисектрисы углов A, B и C, то точки их пересечения, ближайшие к сторонам, являются вершинами равностороннего треугольника*. А что

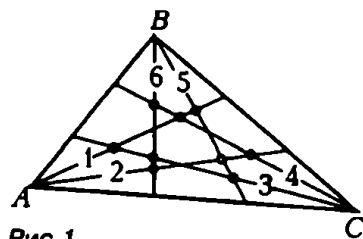


Рис. 1

получится, если трисектрисы заменить *тридианами*, т.е. прямыми, проходящими через вершины треугольника и делящими противоположные его стороны на три равные части? Оказывается... Впрочем, настойчивый читатель сам закончит формулировку теоремы, выяснит свойства треугольника  $P_{14}P_{36}P_{25}$

(обозначения легко понять, глядя на рисунок 1), убедится в том, что стороны шестиугольника  $P_{13}P_{46}P_{15}P_{24}P_{35}P_{26}$  параллельны сторонам исходного треугольника ABC, и, наконец, докажет, что середины сторон этого шестиугольника и точки  $P_{36}$ ,  $P_{23}$ ,  $P_{25}$ ,  $P_{45}$ ,  $P_{14}$ ,  $P_{61}$  лежат на трех прямых. Если вам пока не понятно, как решать эту задачу, — не расстраивайтесь. Прочитав статью, вы несомненно сможете это сделать. Начнем с более простой задачи.

## Аффинная задача Льюиса Кэррола

Предпоследняя задача сборника «Полуночные задачи, придуманные в часы бессонницы»<sup>1</sup> требует вписать в данный

<sup>1</sup> Льюис Кэррол. *История с узелками* (М., «Мир», 1973).

треугольник такой шестиугольник, чтобы его противоположные стороны были равны и параллельны, три из них лежали на сторонах треугольника, а диагонали пересекались в заданной точке внутри треугольника. Решение, приведенное Кэрролом, использует средства, привычные для школьника тех давних времен (восьмидесятые годы прошлого столетия). Мы рассмотрим более общую формулировку задачи Кэррола и решим ее, используя инструмент, знакомый современному школьнику уже с седьмого класса, — векторы. Конечно, задачу Кэррола совсем не сложно решить и без их помощи. Но именно потому, что она несложная, на ней хорошо учиться!

Мы решим задачу Кэррола в следующей формулировке: на прямых, содержащих стороны  $BC$ ,  $CA$  и  $AB$  треугольника  $ABC$ , расположите, соответственно, точки  $A_1$  и  $A_2$ ,  $B_1$  и  $B_2$ ,  $C_1$  и  $C_2$  так, чтобы противоположные вершины шестиугольника  $A_1A_2B_1B_2C_1C_2$  (т.е. точки  $A_1$  и  $B_2$ ,  $A_2$  и  $C_1$ ,  $B_1$  и  $C_2$ ) были симметричны относительно точки  $P$ , произвольно заданной в плоскости треугольника  $ABC$  (рис.2)<sup>2</sup>. (Такой шестиугольник называют *центральный*.)

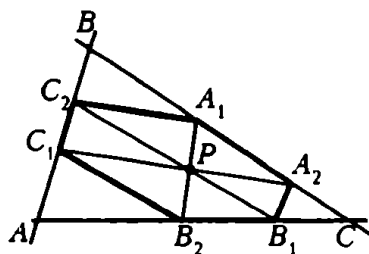


Рис. 2

### Разложение по векторам

Нам понадобится такой факт: если векторы  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  не коллинеарны, то любой вектор  $\vec{c}$ , лежащий в той же плоскости, что и векторы  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ , можно представить в виде

$$\vec{c} = \alpha \vec{a} + \beta \vec{b}$$

(здесь  $\alpha$  и  $\beta$  — действительные числа), причем такое представление единственно.

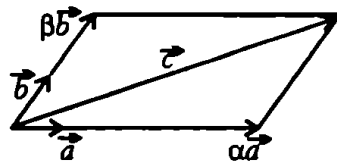


Рис. 3

Мы будем называть это представление *разложением вектора  $\vec{c}$  по векторам  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$*  (рис.3).

Заметим, что если  $O$  — фиксированная точка плоскости, то любой точке  $M$  плоскости можно сопоставить вектор  $\vec{OM}$ . Точку  $O$  называют *полусом*, вектор  $\vec{OM}$  — *радиус-вектором* точки  $M$ .

<sup>2</sup> В этом и состоит большая общность нашей формулировки — Кэррол считает, что точка  $P$  лежит *внутри* треугольника  $ABC$ .

Радиус-вектор  $\vec{OM}$  однозначно определяет «свою» точку  $M$ ; мы будем для краткости обозначать его через  $\vec{M}$ .

### Решение задачи Кэррола

Выберем в качестве полюса вершину  $C$  данного треугольника. Радиус-вектор данной точки  $P$  разложим по векторам  $\vec{A}$  и  $\vec{B}$ :

$$\vec{P} = \alpha \vec{A} + \beta \vec{B}.$$

Поскольку искомая точка  $A_1$  лежит на прямой  $CB$  (см. рис.2),

$$\vec{A}_1 = x \vec{B},$$

где  $x$  — та доля, которую точка  $A_1$  «отсекает» от направленного отрезка  $\vec{CB}$ . Слово «отсекает» мы взяли в кавычки потому, что точка  $A_1$  не обязательно лежит внутри отрезка  $CB$ ; она может «отсекать» даже отрицательную «долю» (в этом случае  $x < 0$ ). Аналогичным образом для искомой точки  $B_2$  получаем

$$\vec{B}_2 = y \vec{A}$$

(здесь  $y$  — доля, которую «отсекает» искомая точка от направленного отрезка  $\vec{CA}$ ). Из того, что точка  $P$  является серединой отрезка  $A_1B_2$ , вытекает

$$\vec{P} = \frac{1}{2}(\vec{A}_1 + \vec{B}_2),$$

т.е.

$$\alpha \vec{A} + \beta \vec{B} = \frac{1}{2}(x \vec{B} + y \vec{A}),$$

откуда

$$x = 2\beta, \quad y = 2\alpha$$

и, следовательно,

$$\vec{A}_1 = 2\beta \vec{B}, \quad \vec{B}_2 = 2\alpha \vec{A}.$$

Эти равенства позволяют построить точки  $A_1$  и  $B_2$ .

Найти точки  $B_1$  и  $C_2$  немного труднее. Если точка  $B_1$  отсекает долю  $z$  от направленного отрезка  $\vec{CA}$ , то

$$\vec{B}_1 = z \vec{A}.$$

Составим теперь выражение для радиус-вектора точки  $C_2$ , отсекающей долю  $u$  от направленного отрезка  $\vec{AB}$ :

$$\vec{AC}_2 = u \vec{AB}.$$

Воспользуемся тем, что  $\vec{AC_2} = \vec{C_2} - \vec{A}$ ;  $\vec{AB} = \vec{B} - \vec{A}$ . Поэтому  $u(\vec{B} - \vec{A}) = \vec{C_2} - \vec{A}$  и, следовательно,  $\vec{C_2} = \vec{A} + u(\vec{B} - \vec{A}) = (1-u)\vec{A} + u\vec{B}$ . По условию

$$P = \frac{1}{2}(\vec{B_1} + \vec{C_2}),$$

т.е.

$$\alpha\vec{A} + \beta\vec{B} = \frac{1}{2}(z\vec{A} + (1-u)\vec{A} + u\vec{B})$$

и, таким образом,

$$u = 2\beta, \quad z = 2\alpha + 2\beta - 1,$$

$$\vec{B_1} = (2\alpha + 2\beta - 1)\vec{A},$$

$$\vec{C_2} = (1 - 2\beta)\vec{A} + 2\beta\vec{B}.$$

Выполнив заключительный этап самостоятельно, читатель убедится, что

$$\vec{A_2} = (2\alpha + 2\beta - 1)\vec{B},$$

$$\vec{C_1} = 2\alpha\vec{A} + (1 - 2\alpha)\vec{B}.$$

Мы обнаружили, таким образом, что задача Кэррола имеет решение (как бы ни была задана точка  $P$ !) и это решение единственное:

$$\begin{cases} \vec{A_1} = 2\beta\vec{B}, \vec{A_2} = (2\alpha + 2\beta - 1)\vec{B}, \\ \vec{B_1} = (2\alpha + 2\beta - 1)\vec{A}, \vec{B_2} = 2\alpha\vec{A}, \\ \vec{C_1} = 2\alpha\vec{A} + (1 - 2\alpha)\vec{B}, \vec{C_2} = (1 - 2\beta)\vec{A} + 2\beta\vec{B}. \end{cases} \quad (1)$$

### Отступление от задачи Кэррола

Вывод формулы для  $\vec{C_2}$  фактически доказывает следующий общий результат: если  $\vec{A}$  и  $\vec{B}$  — радиус-векторы произвольных точек  $A$  и  $B$  (относительно произвольно выбранного полюса  $C$ !), то радиус-вектор  $\vec{M}$  точки, принадлежащей прямой  $AB$  и отсекающей «долю»  $\lambda$  от направленного отрезка  $\vec{AB}$ , т.е. точки  $M$ , для которой  $\vec{AM} = \lambda \vec{AB}$  (рис.4), определяется по простой и красивой формуле:

$$\vec{M} = (1 - \lambda)\vec{A} + \lambda\vec{B}. \quad (2)$$

Эту формулу следует запомнить

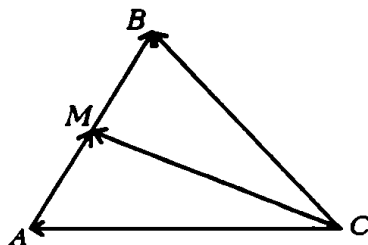


Рис. 4

— она с большой пользой применяется при решении многих геометрических задач.

Число  $\lambda$  называют *аффинной координатой* точки  $M$  (относительно координатной системы, заданной началом  $A$  и масштабным вектором  $\vec{AB}$ ). Такое название вполне оправдано: ведь если заданы координатная система и произвольное число  $\lambda$ , то точка  $M$  на прямой  $AB$  определена однозначно:

$$\vec{AM} = \lambda \vec{AB}.$$

Вернемся к формуле

$$\vec{P} = \alpha \vec{A} + \beta \vec{B},$$

с помощью которой мы записали радиус-вектор точки  $P$ , расположенной в плоскости треугольника  $ABC$ . Она показывает, что задание произвольной упорядоченной пары чисел  $\alpha, \beta$  определяет точку  $P$  в плоскости  $ABC$ , если задана точка  $C$  и векторы  $\vec{CA}$  и  $\vec{CB}$  (рис.5).

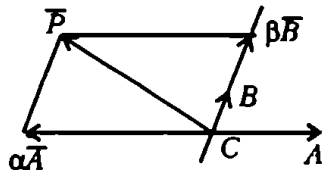


Рис. 5

Эти числа называются *аффинными координатами* точки  $P$  (в координатной системе, начало которой — точка  $C$ , а масштабные векторы —  $\vec{CA}$  и  $\vec{CB}$ ). Легко видеть, что точки плоскости  $ABC$ , у которых вторая координата равна нулю, лежат на прямой  $CA$ ; потому ее называют *первой координатной осью*. Аналогично, точки, у которых первая координата равна нулю, лежат на прямой  $CB$ ; поэтому ее называют *второй координатной осью*.

### Частные случаи задачи Кэррола

1) Если точка  $P$  есть *центроид* треугольника  $ABC$  (т.е. пересечение его медиан), то

$$\vec{OP} = \frac{1}{3}(\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC})$$

и, следовательно,

$$\vec{P} = \frac{1}{3} \vec{A} + \frac{1}{3} \vec{B},$$

т.е.

$$\alpha = \frac{1}{3}, \beta = \frac{1}{3}.$$

Подставив эти значения в формулы (1), получим

$$\bar{A}_1 = \frac{2}{3} \bar{B},$$

$$\bar{A}_2 = \frac{1}{3} \bar{B}, \quad \bar{B}_1 = \frac{1}{3} \bar{A}, \quad \bar{B}_2 = \frac{2}{3} \bar{A},$$

$$\bar{C}_1 = \frac{2}{3} \bar{A} + \frac{1}{3} \bar{B}, \quad \bar{C}_2 = \frac{1}{3} \bar{A} + \frac{2}{3} \bar{B}$$

и, следовательно (в силу сказанного в предыдущем пункте), вершины найденного шестиугольника отсекают от сторон треугольника  $\frac{1}{3}$  и  $\frac{2}{3}$ .

2) Пусть  $P$  — какая-либо точка отрезка  $B'C'$ , соединяющего середины  $B'$  и  $C'$  сторон  $CA$  и  $AB$ . Так как эта точка расположена внутри отрезка  $B'C'$ , она отсекает от него долю  $0 < \lambda < 1$  и, в силу формулы (2),

$$\bar{P} = (1 - \lambda) \bar{B}' + \lambda \bar{C}',$$

$$\bar{P} = \frac{1 - \lambda}{2} \bar{A} + \frac{\lambda}{2} (\bar{A} + \bar{B}),$$

$$\bar{P} = \frac{1}{2} \bar{A} + \frac{\lambda}{2} \bar{B},$$

т.е.

$$\alpha = \frac{1}{2}, \quad \beta = \frac{\lambda}{2}.$$

Подставив эти значения в формулы (1), получим

$$\bar{A}_1 = \lambda \bar{B}, \quad \bar{A}_2 = \lambda \bar{B}, \quad \bar{B}_1 = \lambda \bar{A}, \quad \bar{B}_2 = \bar{A}, \quad \bar{C}_1 = \bar{A},$$

$$\bar{C}_2 = (1 - \lambda) \bar{A} + \lambda \bar{B}.$$

Таким образом, в этом случае шестиугольник  $A_1A_2B_1B_2C_1C_2$  вырождается в параллелограмм  $A_1A_2B_1A_1C_2 = A_1B_1AC_2$  (рисунок 6 сделан для случая, когда  $\lambda = \frac{4}{5}$ ).

3) Если точка  $P$  расположена произвольным образом на прямой  $B'C'$  вне отрезка  $B'C'$ , то ее аффинная координата  $\lambda$  (в координатной системе, имеющей начало в точке  $C'$  и масштабный вектор  $\vec{B'C'}$ ) есть либо положительное число, большее единицы, либо отрицательное число. Радиус-векторы вершин построенного шестиу-

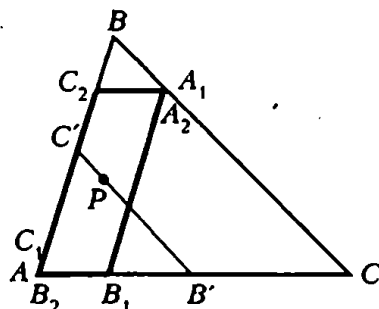


Рис. 6



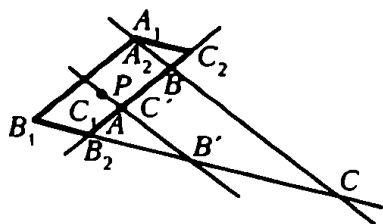


Рис. 7

гольника определяются, конечно, теми же формулами, что и в общем случае, однако эти вершины — в этом самостоятельно убедится читатель — хотя и расположатся на прямых  $AB$ ,  $BC$  и  $CA$ , будут вне отрезков  $AB$ ,  $BC$ ,  $CA$  (на рисунке 7  $\lambda = \frac{4}{5}$ ).

4) Если точка  $P$  выбрана в середине  $A'$  отрезка  $BC$ , т.е. если  $\bar{P} = \frac{1}{2}\bar{B}$  и, следовательно,  $\alpha = 0$ ,  $\beta = \frac{1}{2}$ , то, в силу формул (1),  $\bar{A}_1 = \bar{B}$ ,  $\bar{A}_2 = \bar{C}$ ,  $\bar{B}_1 = \bar{C}$ ,  $\bar{B}_2 = \bar{C}$ ,  $\bar{C}_1 = \bar{B}$ ,  $\bar{C}_2 = \bar{B}$ . Таким образом, в этом случае шестиугольник  $A_1A_2B_1B_2C_1C_2$  вырождается в отрезок  $BCCCBB = BC$ .

Пусть читатель самостоятельно построит чертеж, соответствующий случаям, когда  $P = C$ ,  $P = A'$  или  $P$  делит пополам отрезок  $AC'$ .

### Не ошибся ли Кэррол?

Последняя строка в решении, которое приводит Кэррол, гласит: «Если точка  $P$  лежит вне треугольника  $A'B'C'$ , то задача неразрешима»<sup>3</sup>. Но мы ведь видели, что задача имеет решение (и притом единственное) для любого расположения точки  $P$  в плоскости  $ABC$ !

Объяснение этого расхождения заключается вот в чем:

Кэррол считает (хотя явно этого не говорит), что шестиугольник  $A_1A_2B_1B_2C_1C_2$  только тогда вписан в треугольник  $ABC$ , когда его стороны  $A_1A_2$ ,  $B_1B_2$ ,  $C_1C_2$  расположены внутри сторон  $BC$ ,  $CA$ ,  $AB$  соответственно. Но если включить в условие нашей задачи это дополнительное ограничение, то, в частности, точка  $A_1$  должна лежать внутри отрезка  $CB$  и, в силу первой формулы системы (1),  $2\beta < 1$ , т.е.  $\beta < \frac{1}{2}$ , а это означает, что точка  $P$  должна лежать по другую сторону от прямой  $A'C'$ , чем вершина  $B$ .

Аналогичным образом, она должна лежать по другую сторону от прямой  $A'B'$ , чем точка  $C$ , и по другую сторону от прямой

<sup>3</sup> «История с узелками», с.186. Однако доказательства этой неразрешимости Кэррол не приводит! Отметим тут же, что, хотя разрешимость своей задачи для случая, когда точка  $P$  лежит внутри треугольника  $A'B'C'$ , Кэррол и доказывает, но вопрос о единственности решения он не рассматривает!

$B'C'$ , чем точка  $A$ . Отсюда и следует, что точка  $P$  должна лежать внутри треугольника  $A'B'C'$ !

Приведем две задачи, связанные с задачей Кэррола; их векторное решение очень просто, а геометрическое...

1) Легко проверить, что в случае 1 пункта 6 центроиды треугольников  $A_1B_1C_1$  и  $A_2B_2C_2$  совпадают. Существуют ли другие вписанные центральные шестиугольники, обладающие этим свойством?

2) Легко проверить, что в случае 1 пункта 6 площади треугольников  $PA_1A_2$ ,  $PA_2B_1$  и  $PB_1B_2$  равны между собой; в этом случае центральный шестиугольник  $A_1A_2B_1B_2C_1C_2$  называют *аффинно-правильным*. Существуют ли другие аффинно-правильные шестиугольники, вписанные в заданный треугольник?

Решение использует следующую красивую формулу для вычисления площади треугольника  $P_1P_2P_3$ , вершины которого заданы равенствами  $\vec{P}_i = \alpha_i \vec{A} + \beta_i \vec{B}$  ( $i = 1, 2, 3$ ;  $\vec{CA}$  и  $\vec{CB}$  — заданные векторы):

$$S_{\overline{P_1P_2P_3}} = \left\{ \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha_2 & \beta_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha_3 & \beta_3 \\ \alpha_1 & \beta_1 \end{vmatrix} \right\} S_{\overline{CAB}}.$$

**И все же — что означает слово «аффинный»?**

Заметил ли читатель, что в нашей статье мы ни разу не употребили слово «длина»? Мы не воспользовались и понятием «угол».

Например, складывая векторы  $\vec{CM}$  и  $\vec{CN}$ , не лежащие на одной прямой, мы пользуемся только понятием параллельности: через конец  $M$  первого слагаемого  $\vec{CM}$  мы проводим прямую, параллельную прямой  $CN$ ; через конец  $N$  второго слагаемого  $\vec{CN}$  мы проводим прямую, параллельную прямой  $CM$ ; точка  $D$  пересечения этих прямых есть конец вектора  $\vec{CD}$ , который мы и называем *суммой* векторов  $\vec{CM}$  и  $\vec{CN}$ .

А как же складывать — не используя понятия длины! — векторы  $\vec{CT}$  и  $\vec{CU}$ , расположенные на одной прямой? Как умножить вектор  $\vec{CM}$  на произвольное действительное число  $\lambda$ ? Как доказать при «аффинном» определении (т.е. определении, не использующем понятий длины и угла, а опирающемся только на понятие параллельности) правила векторной алгебры, которыми мы щедро пользовались во всем нашем изложении? Мы не будем отвечать на эти вопросы, а ограничимся тем, что предло-

жим читателю решить, пользуясь только простейшими, «аффинными», операциями (сложение векторов и умножение вектора на число), несколько «аффинных» задач.

### Задачи

1. Докажите, что, как бы ни были расположены точки  $A, B, C$  и  $D$ , три отрезка, соединяющие середины отрезков  $AB$  и  $CD$ ,  $AC$  и  $BD$ ,  $AD$  и  $BC$ , имеют общую точку.

2. На прямых  $AB$  и  $CD$ , произвольно расположенных в пространстве, лежат точки  $A'$  и  $C'$ , отсекающие, соответственно, от отрезков  $\vec{AB}$  и  $\vec{CD}$  одну и ту же долю. На прямых  $BC$  и  $DA$  лежат точки  $B'$  и  $D'$ , отсекающие от отрезков  $\vec{BC}$  и  $\vec{DA}$  одну и ту же долю. Докажите, что прямые  $A'C'$  и  $B'D'$  пересекутся.

3. Семь точек  $A_i$  ( $i = 1, 2, \dots, 7$ ) произвольно расположены в пространстве,  $P$  — произвольная точка. Пусть  $B_{ijk}$  — центроид системы точек  $A_i, A_j, A_k$ ,  $B_{lmnp}$  — центроид системы остальных точек (индексы  $i, j, k, l, m, n, p$  все различны),  $\varphi_{ijk}$  — прямая, проходящая через точку  $B_{ijk}$  параллельно прямой  $PB_{lmnp}$ ,  $\psi_{lmnp}$  — прямая, проходящая через точку  $B_{lmnp}$  параллельно прямой  $PB_{ijk}$ . Докажите, что 1) все прямые  $\varphi_{ijk}$  пересекаются в одной точке; 2) все прямые  $\psi_{lmnp}$  пересекаются в одной точке.

4. На сторонах  $AB, BC, CA$  треугольника  $ABC$  расположите, соответственно, точки  $C', A', B'$  так, чтобы центроиды треугольников  $A'B'C'$  и  $ABC$  совпали.

5. Докажите, что из всех треугольников  $A'B'C'$ , вписанных в треугольник  $ABC$  так, что центроиды треугольников  $ABC$  и  $A'B'C'$  совпадают, наименьшая площадь будет у того, вершины которого делят стороны треугольника  $ABC$  пополам.

6. Каждая сторона четырехугольника  $ABCD$  разделена на три равные части. Через те две точки деления сторон  $AB$  и  $AD$ , которые ближе других расположены к вершине  $A$ , проведена прямая. Аналогичным образом, через точки деления, ближайшие к вершинам  $B, C, D$ , проведены еще три прямые. Докажите, что центр тяжести четырехугольника, образованного этими четырьмя прямыми, совпадает с центром тяжести четырехугольника  $ABCD$ .

Н.Васильев

«...держитесь к задаче возможно ближе, но будьте готовы отойти от задачи настолько далеко, насколько вас вынуждают обстоятельства».

Д.Пойа. Математическое открытие

## Формулировка задачи

Вокруг выпуклого  $n$ -угольника описан другой выпуклый  $n$ -угольник — так, что на каждой стороне второго лежит по одной вершине первого, а затем вокруг второго многоугольника описывается третий — так, что его стороны соответственно параллельны сторонам первого. (Для краткости мы будем говорить, что первый и третий многоугольники параллельны.) Пример такой ситуации изображен на рисунке 1. Требуется выяснить, какие значения может принимать площадь  $S$  промежуточного многоугольника, если площади внутреннего и внешнего многоугольников равны  $Q$  и  $P$ .

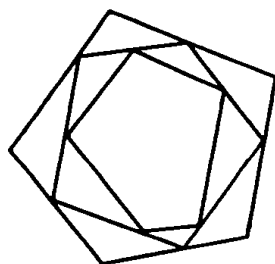


Рис. 1

Разумеется, сразу можно утверждать, что  $Q < S < P$ . Но любые ли три положительных числа  $P$ ,  $Q$  и  $S$ , связанные такими неравенствами, могут стать площадями трех многоугольников, описанных в условии?

## Попробуем посчитать

Возьмем сразу довольно общий пример тройки четырехугольников, изображенный на рисунке 2. Симметрия рисунка позволяет сравнительно легко выразить все площади через стороны, высоты и другие удобные параметры.

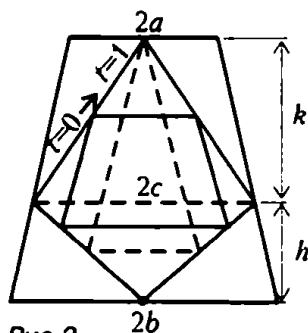


Рис. 2

При различных значениях параметров можно надеяться получить всевозможные наборы  $P$ ,  $Q$ ,  $S$ .

(Мы начинаем с четырехугольников, а не с треугольников, поскольку случай  $n = 3$  особый; в этом случае  $S$  однозначно определяется по  $Q$  и  $P$ ; мы еще вернемся к нему ниже.)

В нашем примере внешний четырехугольник — равнобочная трапеция с основаниями  $2a$  и  $2b$  (пусть  $a < b$ ) и высотой  $k + h$ , так что

$$P = (a + b)(k + h). \quad (1)$$

Диагонали среднего четырехугольника взаимно перпендикулярны и равны  $k + h$

$$2c = 2a \frac{h}{k + h} + 2b \frac{k}{k + h},$$

поэтому

$$S = ah + bk. \quad (2)$$

Если эти два четырехугольника уже зафиксированы, то внутреннюю трапецию можно еще менять так, что она будет оставаться параллельной внешней трапеции. Можно представить себе, что вершины трапеции равномерно передвигаются по красным отрезкам в интервале времени  $0 \leq t \leq 1$ , причем в момент времени  $t = 0$  трапеция вырождается в отрезок  $2c$ , в момент времени  $t = 1$  — в равнобедренный треугольник с основанием  $2b' = 2c \frac{b-a}{b}$  и высотой  $k + h'$ , где  $h' = h \frac{a}{b}$ , а каждому значению  $t$  между 0 и 1 соответствует настоящая трапеция с основаниями  $2c(1-t)$ ,  $2c(1-t) + 2b't$  и высотой  $tk + th'$ . Тогда ее площадь равна

$$Q(t) = c \left( 2(1-t) + \frac{b-a}{b} t \right) \left( k + \frac{ha}{b} t \right) = \frac{(ah + bk)^2}{b^2(k+h)} t (2b - (a+b)t). \quad (3)$$

Последнее выражение — квадратный трехчлен от  $t$  — достигает максимума при  $t = \frac{b}{a+b}$ , и, очевидно, при  $0 < t < 1$  принимает всевозможные значения в таком промежутке:

$$0 < Q \leq \frac{(ah + bk)^2}{(a+b)(k+h)} = \frac{S^2}{P}. \quad (4)$$

### Упражнения

1\*. Вода, налитая в аквариум, постепенно испаряется.

а) Каков уровень воды сейчас, если  $h$  часов назад он равнялся  $b$  см (от дна), а через  $k$  часов будет  $a$  см?

б) Каков уровень воды в момент времени  $t$ , если при  $t = 0$  он равен  $c$  см, а при  $t = 1$  он равен  $d$  см?

Ответ. а)  $a \frac{h}{h+k} + b \frac{k}{h+k}$ ; б)  $c(1-t) + dt$ .

2\*. Купец знает, что продать  $t \cdot 100\%$  своего товара он сможет только в том случае, если назначит цену не больше  $2b - (a+b)t$  рублей за пуд ( $a$  и  $b$  — известные положительные числа). Как он может выручить побольше денег?

**Ответ.** Продать  $\frac{b}{a+b}$  товара по цене  $b$  рублей за пуд.

Итак, в нашем первом примере  $Q$ ,  $P$  и  $S$  могут принимать любые значения, для которых выполнены неравенства  $S < P$  и  $QP \leq S^2$ , или, что то же самое,  $\sqrt{QP} \leq S < P$ . Действительно, по заданным  $P$  и  $S$  ( $S < P$ ) мы можем подобрать  $a$ ,  $b$ ,  $k$ ,  $h$  так, чтобы выполнялись равенства (1) и (2), например, решив систему уравнений

$$\begin{aligned} a + b &= k + h = \sqrt{P}, \\ (b - a)(k - h) &= 2S - P, \end{aligned}$$

а затем (если только выполнено (4)!) выбрать  $t$  так, чтобы  $Q = Q(t)$  приняло нужное значение.

### Упражнения

3. Докажите, что если  $QP = S^2$ , то трапеции на рисунке 2 подобны.

4. Докажите, что если наши параллельные многоугольники — прямоугольники (рис.3), то тоже  $Q \leq S^2/P$ .

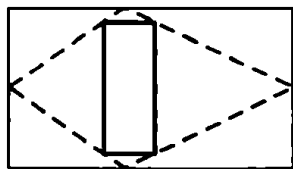


Рис. 3

Неужели всегда будет выполняться это странное неравенство:

$$S^2 \geq QP? \quad (5)$$

### Попытка опровержения

Рассмотрим еще один, менее симметричный пример, когда многоугольник  $S$  вырождается в треугольник  $OAC$ , а многоугольники  $P$  и  $Q$  — в параллельные четырехугольники  $OABC$  и  $OGEH$  (рис.4). Условимся обозначать сами многоугольники теми же буквами, что и их площади:  $S$ ,  $P$  и  $Q$ . (Можно представить себе, что на рисунке 4 изображены три  $n$ -угольника ( $n$  — произвольное,  $n \geq 4$ ), у которых все вершины, кроме двух у  $S$  и трех у  $P$  и  $Q$ , расположены чрезвычайно близко к точке  $O$ . Ясно, что если нам удастся построить вырожденный пример, в котором  $S^2 < PQ$ , то, слегка его «пошевелив», мы сможем получить пример с настоящими, невырожденными  $n$ -угольниками.)

Будем считать, что вершины  $O$ ,  $A$ ,  $B$ ,  $C$  зафиксированы, а  $E$  может передвигаться по отрезку  $AC$  (при этом точки  $G$  и  $H$  передвигаются по отрезкам  $OA$  и  $OC$ ).

Заметим, что если  $E$  попадет в точку  $E_0$

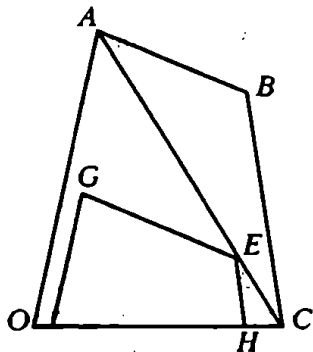


Рис. 4

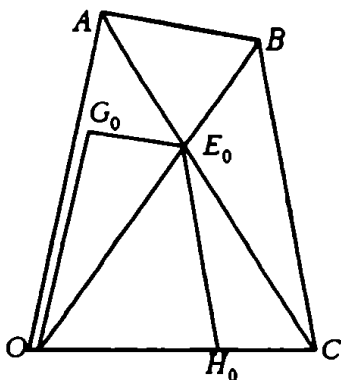


Рис. 5

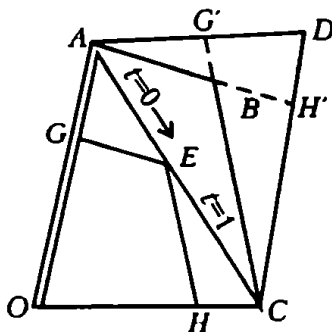


Рис. 6

пересечения  $OB$  и  $AC$ , то четырехугольники подобны и  $S^2 = PQ$ . Действительно, в этом случае отношения площадей  $P/S$ ,  $S/Q$  и соответствующие отношения площадей треугольников, на которые делятся  $P$ ,  $S$  и  $Q$  прямой  $OB$ , все равны отношениям  $\frac{OA}{OG_0} = \frac{OB}{OE_0} = \frac{OC}{OH_0}$  (рис.5).

Теперь найдем, при каком положении точки  $E$  на отрезке  $AC$  сумма площадей двух треугольников  $AGE$  и  $HEC$  минимальна. Пусть  $H'$  — точка пересечения прямых  $AB$  и  $CD$ ,  $G'$  — прямых  $CB$  и  $AD$  ( $D$  — четвертая вершина параллелограмма  $OADC$ , рис.6),  $M_1$  и  $M_2$  — площади треугольников  $AH'C$  и  $AG'C$ . Если точка  $E$  делит отрезок  $AC$  в отношении  $\frac{AE}{EC} = \frac{t}{1-t}$  ( $0 < t < 1$ ), то сумма площадей треугольников  $AGE$  и  $HEC$  равна

$$M_1 t^2 + M_2 (1-t)^2 = (M_1 + M_2) t^2 - 2M_2 t + M_2 \quad (6)$$

и минимальна при  $t = t^* = \frac{M_2}{M_1 + M_2}$ , т.е.

для такой точки  $E^*$ , которая делит отрезок  $AC$  в отношении  $\frac{t^*}{1-t^*} = \frac{M_2}{M_1}$ .

А площадь  $Q$  четырехугольника  $OGEH$  (при фиксированных точках  $O$ ,  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ) при этом положении  $E = E^*$  максимальна.

**Упражнение 5\*.** Через точку  $E$  на диагонали  $AC$  трапеции  $ABCD$  проводится прямая, параллельная основаниям трапеции и пересекающая боковые стороны  $AB$  и  $CD$  в точках  $G$  и  $H$ . При каком положении точки  $E$  сумма площадей треугольников  $AGE$  и  $EHС$  минимальна?

**Ответ.** Когда  $\frac{AE}{EC} = \frac{AD}{BC}$ , т.е. когда точка  $E$  совпадает с точкой пересечения диагоналей (и  $GE = EH$ ).

Итак, мы знаем, что для  $E = E_0$  выполнено равенство  $Q = S^2/P$ , а для  $E = E^*$  площадь больше!

Неудача в попытке построить пример, опровергающий неравенство (5), может постигнуть нас только в том случае, если всегда, при любом выборе точки  $B$  внутри треугольника  $ADC$ , точка  $E^*$  совпадает с  $E_0$ , т.е. выполняется равенство

$$\frac{AE_0}{E_0C} = \frac{M_2}{M_1} \quad (7)$$

(где  $M_1 = S_{\triangle AH'C}$ ,  $M_2 = S_{\triangle AG'C}$ ).

Казалось бы, почему эти отношения должны быть связаны друг с другом?

### Подтверждение гипотезы

Однако оказывается, что равенство (7) всегда верно.

Докажем его, используя понятие центра тяжести.

Поместим в вершинах параллелограмма  $OADC$  массы так, чтобы центр тяжести масс  $m_A$  и  $m_D$  попал в точку  $G'$ , масс  $m_C$  и  $m_O$  — в точку  $H'$ , масс  $m_O$  и  $m_D$  — в середину диагонали параллелограмма: возьмем

$$m_D = m_O = 1, \quad m_A = \frac{M - M_2}{M_2}, \quad m_C = \frac{M - M_1}{M_1},$$

где  $M = S_{\Delta ADC}$ ,  $M_1$  и  $M_2$  — такие, как в (7). Тогда центр тяжести трех масс  $m_A$ ,  $m_D$ ,  $m_C$  окажется в точке  $B$  пересечения прямых  $AH'$  и  $CG'$ , а значит, центр тяжести всех четырех масс лежит на отрезке  $OB$ . С другой стороны, пару  $m_O$  и  $m_D$  можно заменить парой масс, тоже единичных, расположенных в вершинах  $A$  и  $C$  параллелограмма  $OADC$ , поэтому центр тяжести все четырех масс  $m_A$ ,  $m_D$ ,  $m_O$ ,  $m_C$  совпадает с центром тяжести двух  $\frac{M}{M_2}$  и  $\frac{M}{M_1}$ , помещенных соответственно в точки  $A$  и  $C$ , и делит отрезок  $AC$ , в отношении  $M_2 : M_1$ . Итак, мы доказали, что отрезок  $OB$  делит отрезок  $AC$  в отношении  $M_2 : M_1$ , т.е.  $E^* = E_0$ .

**Упражнение 6\*.** Пусть прямая  $l$  пересекает стороны  $AB$  и  $AD$  параллелограмма  $ABCD$  в точках  $G$  и  $H$ , диагональ  $AC$  — в точке  $E$ . Докажите, что

$$\frac{AC}{AE} = \frac{AB}{AG} + \frac{AD}{AH}.$$

Таким образом, наша попытка построить пример, опровергающий неравенство (5), провалилась. Но можно взглянуть на ситуацию с другой точки зрения: из гипотезы, что неравенство (5) всегда выполняется, мы получили неожиданное следствие — равенство (7) — и смогли его доказать. Это обстоятельство, конечно, сильно укрепляет веру в справедливость такой гипотезы.

Мы рассказали только о некоторых попытках опровергнуть неравенство (5). На самом деле их было гораздо больше — здесь выбраны только те, которые удалось изложить коротко (упражнения со значком\*, хотя и не имеют прямого отношения к задаче, призваны выделить основные соображения, используемые в наших доказательствах). Последняя попытка, приведшая к равенству (7), в действительности стала переломным моментом в решении задачи: сомнений, что неравенство  $S^2 \geq PQ$  всегда выполняется, уже не оставалось, и все силы были направлены на то, чтобы это доказать. Однако и здесь далеко не первая выбранная тропинка вела к цели.



Вот, например, попытки доказать утверждение задачи, используя разбиение  $n$ -угольника на треугольники и четырехугольники.

## Упражнения

7. Из произвольной точки внутреннего многоугольника  $Q$  проведем лучи, проходящие через все вершины многоугольника  $S$ , и обозначим через  $S_i, P_i, Q_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) части площадей  $S, P$  и  $Q$ , заключенные в углах между соседними лучами (рис. 7). Докажите, что для каждого  $i$  верно неравенство  $S_i^2 \geq Q_i P_i$ .

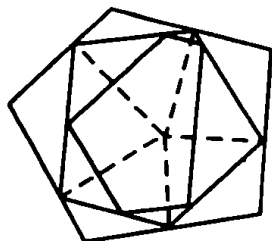


Рис. 7

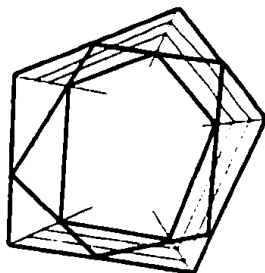


Рис. 8

8. Разобьем «зазор» между контурами многоугольников  $P$  и  $Q$  на  $n$  трапеций  $T_i$  (рис. 8). а) Докажите, что  $Q$  можно разбить на части  $Q'_i$  так, что  $Q'_i$  лежит между продолжениями боковых сторон трапеции  $T_i$ . б) Докажите, что при таком разбиении для площадей  $Q'_i, P'_i = Q'_i \cup T_i$  и  $S'_i = (S \cap T_i) \cup Q'_i$  выполняется неравенство  $(S'_i)^2 \geq P'_i Q'_i$ .

9. Пусть  $S_i^2 \geq P_i Q_i$  для каждого  $i = 1, 2, \dots, n$ . Следует ли отсюда, что  $(\sum S_i)^2 \geq (\sum P_i)(\sum Q_i)$ ?<sup>1</sup>

Ответ. Нет, не следует.

Попробуем перевести задачу на язык алгебры и доказать полученное неравенство.

## Средний — лишний

В одном отношении эта попытка оказывается успешной: она позволяет упростить нашу задачу, выбросив из нее упоминание о «промежуточном» многоугольнике  $S$  и оставив только  $P$  и  $Q$ . Вот как это получается.

Обозначим стороны внутреннего многоугольника  $Q$  через  $a_i$ , параллельные им стороны  $P$  — через  $b_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ; теми же

<sup>1</sup> Здесь  $\sum x_i$  обозначает сумму  $x_1 + \dots + x_n$ .

буквами мы будем обозначать и длины сторон); расстояния между прямыми, на которых лежат  $a_i$  и  $b_i$ , — через  $h_i$ . Тогда

$$S = Q + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n a_i h_i, \quad P = Q + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (a_i + b_i) h_i. \quad (8)$$

Уже отсюда видно, что  $n$ -угольник  $S$  особенно не нужен: если его вершины двигать по сторонам  $b_i$  (от этого он превратится в  $2n$ -угольник, рис.9), то площадь  $S$  не меняется. Введем такие обозначения:

$$R = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n a_i h_i, \quad T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (a_i + b_i) h_i. \quad (9)$$

Тогда гипотетическое неравенство (5) запишется так:

$$(Q + R)^2 \geq Q(Q + T),$$

или, после упрощений:

$$R^2 \geq Q(T - 2R).$$

Введем еще одно обозначение:

$$K = T - 2R = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (b_i - a_i) h_i; \quad (10)$$

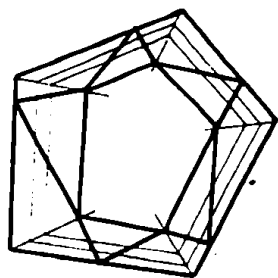


Рис. 9

и тогда наше неравенство примет тот же вид, что и (5):

$$R^2 \geq QK, \quad (11)$$

— но с той приятной разницей, что теперь все величины относятся только к двум параллельным многоугольникам и их взаимному расположению.

**Упражнение 10.** Верно ли, что  $T > 2R$ , т.е.  $K > 0$ ?

**Ответ.** Не всегда. (Впрочем, если  $K < 0$ , неравенство (11), а следовательно, и (5) очевидны.)

Попробуем теперь доказать, что для любых параллельных выпуклых  $n$ -угольников, один из которых лежит внутри другого, неравенство (11) выполняется.

Сразу же отметим, что это утверждение, по крайней мере на первый взгляд, значительно более сильное, чем (5): ведь не всегда между двумя параллельными многоугольниками можно вставить третий: «щель» между ними может оказаться слишком большой (рис.9). Правдоподобно ли предположение (11) во всех случаях?

Мы сейчас увидим, что наше обобщение довольно удачно: неравенство (11) выражает некоторое естественное свойство целого семейства параллельных многоугольников.

Получается это семейство из данных двух многоугольников  $Q$  и  $P$  очень просто. Представим себе, что  $n$  точек, совпадавших в

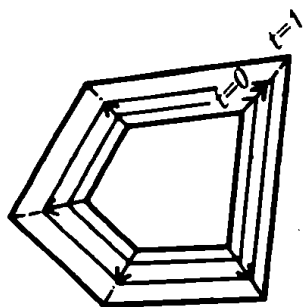


Рис. 10

момент времени  $t = 0$  с вершинами многоугольника  $Q$ , начали двигаться — каждая со своей постоянной скоростью — так, чтобы в момент времени  $t = 1$  попасть в соответствующие вершины многоугольника  $P$  (рис. 10). В любой момент времени  $t$  (по крайней мере между 0 и 1) эти  $n$  точек будут, очевидно, вершинами выпуклого многоугольника, параллельного  $Q$  и  $P$ . Обозначим этот многоугольник (а также его площадь)

через  $F(t)$ . Поскольку длины сторон  $n$ -угольника  $F(t)$  и их расстояния от параллельных сторон  $Q$  изменяются со временем равномерно, имеем

$$F(t) = Q + \sum_{i=1}^n \frac{(a_i(2-t) + b_i t) h_i t}{2} = Q + 2Rt + Kt^2. \quad (12)$$

Мы видим, что  $F(t)$  выражается, как функция времени  $t$ , квадратным трехчленом; неравенство же (11) означает, что дискриминант этого трехчлена  $R^2 - OK$  должен быть больше или равен нулю. Неотрицательность дискриминанта эквивалентна утверждению, что трехчлен  $F(t)$  имеет вещественный корень (но, конечно, этот корень никак не может оказаться на отрезке  $[0, 1]$ , где  $F(t) > 0$  по самому определению).

### Упражнения

11. Докажите, что дискриминант квадратного трехчлена

$$F^*(t) = F(\alpha + \beta t) = (Q + 2R\alpha + K\alpha)^2 + 2(R + K\alpha)\beta t + K\beta^2 t^2$$

имеет тот же знак, что и дискриминант  $F(t)$  (здесь  $\alpha$  и  $\beta$  — любые числа,  $\alpha \neq 0$ ).

*Замечание.* Замена  $t$  на  $\alpha + \beta t$  означает просто выбор другого начала отсчета и другой единицы масштаба на оси  $t$ . Отсюда следует, что неотрицательность дискриминанта — это свойство всего семейства  $F(t)$  параллельных многоугольников, не зависящее от того, какие именно два из них  $Q = F(0)$  и  $P = F(1)$  соответствуют  $t = 0$  и  $t = 1$ .

12\*. Со дна колодца глубиной  $h$  рабочий бросает камень вертикально вверх с начальной скоростью  $v$ . Вылетит ли камень из колодца?

**Ответ.** Да, если дискриминант трехчлена  $y(t) = -h + vt - (gt^2)/2$  положителен ( $g$  — ускорение свободного падения камня):  $v^2 > 2gh$ .

Итак, мы облекли нашу гипотезу (5) в форму следующей теоремы:

*Пусть прямые, на которых лежали стороны выпуклого  $n$ -угольника, в момент времени  $t = 0$  начинают равномерно двигаться — так, что каждая перемещается со своей скоростью, оставаясь параллельной первоначальному положению, и все они до момента  $t = 1$  по-прежнему являются сторонами выпуклого  $n$ -угольника  $F(t)$ . Тогда:*

1) Площадь  $F(t)$  как функция  $t$  выражается квадратным трехчленом:

$$F(t) = Q + 2Rt + Kt^2 \quad (0 \leq t \leq 1).$$

2) Дискриминант этого трехчлена неотрицателен:

$$R^2 - QK \geq 0.$$

3) Дискриминант равен нулю в том и только том случае, если  $n$ -угольник не меняет со временем своей формы (остается подобным первоначальному).

Теорему-то мы сформулировали... Но вот верна ли она — хотя бы для треугольников?

### Семейство треугольников

Два треугольника с параллельными сторонами обязательно подобны, а три прямые, соединяющие соответствующие вершины, пересекаются в одной точке (рис.11).

Последнее утверждение становится очевидным, если представить себе, что один из треугольников приподнят над плоскостью чертежа — перенесен в параллельную плоскость: тогда три плоскости, проходящие через пары параллельных сторон треугольников, — плоскости граней усеченной пирамиды, основаниями которой служат наши треугольники, — пересекаются в одной точке. В этой точке будут пересекаться и прямые, соединяющие вершины треугольников, — продолжения боковых ребер усеченной пирамиды. Спроектировав всю картину вновь на плоскость чертежа, получим, что упомянутые три прямые действительно пересекаются в одной точке  $O$ .

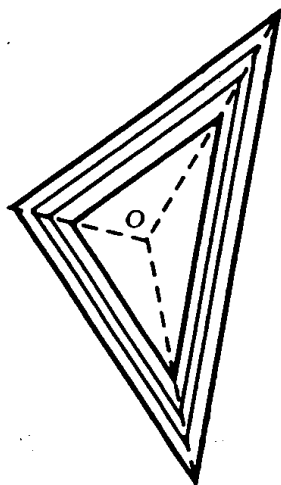


Рис.11

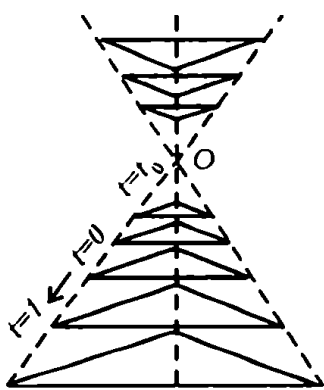


Рис. 12

Семейство параллельных треугольников, заданное для моментов времени  $t$  от 0 до 1, можно естественным образом продолжить на всю ось  $t$  «от минус бесконечности до плюс бесконечности»: в некоторый момент  $t = t_0$  треугольник обратится в точку  $O$ , а затем будет вновь расти; при этом его положения до момента  $t_0$  и после  $t_0$  соответственно симметричны относительно точки  $O$ . (На рисунке 12 изображен случай, когда точка  $O$  лежит вне треугольников; наши рассуждения применимы и к

этому случаю: в формулировке теоремы мы предусмотрительно не оговорили того, в какую сторону — вне или внутрь многоугольника — должны двигаться прямые; позже мы увидим, что это несущественно.) Площадь треугольника в момент времени  $t = t_0$  обращается в нуль, а при любом  $t$  пропорциональна квадрату линейных размеров, т.е. пропорциональна квадрату разности  $(t - t_0)$ :

$$F(t) = c(t - t_0)^2,$$

где  $c$  — постоянное положительное число.

Дискриминант такого квадратного трехчлена равен нулю, и значит, все три пункта нашей теоремы в случае  $n = 3$  выполняются безоговорочно.

### Упражнения

13. Докажите, что прямые, соединяющие соответствующие вершины двух параллельных многоугольников, пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда многоугольники подобны.

14\*. Четыре точки движутся по плоскости равномерно и прямолинейно (каждая — по своей прямой и со своей скоростью). Известно, что первая и вторая точки встречаются с каждой из остальных. Докажите, что третья и четвертая точки встречаются между собой.

15. Проверьте справедливость теоремы для случая, когда исходный многоугольник — параллелограмм.

16\*. Проверьте, что нашу теорему можно сформулировать так: если в аквариуме с плоскими наклонными стенками (каждая из  $n \geq 3$  стенок имеет свой наклон) вода равномерно испаряется, то скорость испарения воды  $S(t)$  в момент времени  $t$  выражается квадратным трехчленом от  $t$ ; его дискриминант неотрицателен, причем равен 0 в том и только в том случае, если плоскости стенок пересекаются в одной точке.

Осталось самое главное (и трудное): доказать теорему для произвольного  $n \geq 4$ .

Было бы очень соблазнительно и в общем случае — для любого  $n$  — продолжить нашу положительную функцию  $F(t)$ , определенную первоначально для  $t \in [0, 1]$ , на всю ось  $t$  и доказать, что при некотором  $t = t'$  ее значение будет отрицательным или равным нулю — отсюда следовало бы, что дискриминант трехчлена  $F(t)$  неотрицателен. Но сделать это сразу для произвольного  $n$  трудно. Поэтому воспользуемся индукцией.

### Приклеим уголок

Предположим, что при некотором  $n \geq 3$  наша теорема доказана, и докажем ее справедливость для семейства параллельных  $(n+1)$ -угольников, представив  $(n+1)$ -угольник как  $n$ -угольник с отрезанным углом.

**Лемма.** У любого  $m$ -угольника ( $m \geq 4$ ), за исключением параллелограмма, найдутся два соседних угла, сумма которых больше  $180^\circ$ .

Действительно, выписав все  $m$  сумм двух соседних углов многоугольника и сложив эти  $m$  слагаемых, мы получим удвоенную сумму всех  $m$  углов:  $2 \cdot 180^\circ \cdot (m-2)$ ; поэтому хотя бы одно из  $m$  слагаемых не меньше

$$2 \cdot 180^\circ \left(1 - \frac{2}{m}\right) = 180^\circ \left(2 - \frac{4}{m}\right) \geq 180^\circ.$$

Равенство возможно только если  $m = 4$  и каждое из (четырех) слагаемых равно  $180^\circ$ .

Возьмем теперь любой  $(n+1)$ -угольник из данного семейства.

Можно считать, что наш  $(n+1)$ -угольник — не параллелограмм (этот простой случай разобран в упражнении 15). Пользуясь леммой, продолжим две стороны  $(n+1)$ -угольника так, чтобы снаружи образовался треугольник, составляющий вместе с  $(n+1)$ -угольником выпуклый  $n$ -угольник (рис.13). Обозначим площади  $(n+1)$ -угольника, треугольника и их объединения в момент времени  $t$  ( $0 \leq t \leq 1$ ) через  $F_{n+1}(t)$ ,  $F_\Delta(t)$  и  $F_n(t)$  соответственно. Тогда

$$F_{n+1}(t) = F_n(t) - F_\Delta(t). \quad (14)$$

По доказанному  $F_\Delta(t)$  — квадратный трехчлен, неотрицательный при всех вещественных  $t$ . По предположению индукции  $F_n(t)$  — квадратный трехчлен с неотрицательным дискриминантом, т.е. существует  $t'$ , при котором  $F_n(t') \leq 0$ . Значит,  $F_{n+1}(t)$  — тоже квадратный трехчлен от  $t$  (причем равенство (14)

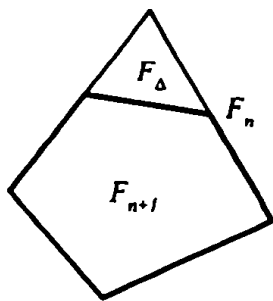


Рис. 13

позволяет определить его для всех значений  $t!$ ) и  $F_{n+1}(t') \leq 0$ , т.е. дискриминант его неотрицателен.

Этот дискриминант равен нулю тогда и только тогда, когда все три трехчлена имеют один и тот же кратный корень  $t = t_0$  (см. (13)). При этом, по предположению индукции,  $n$ -угольник  $F_n(t)$  остается подобным самому себе, стало быть, величина

$\sqrt{F_n(t)}$  и длины всех сторон  $n$ -угольника

$F_n(t)$  пропорциональны  $|t - t_0|$ . То же самое верно и для  $F_\Delta(t)$ , а следовательно, и для  $F_{n+1}(t)$ . Обратное очевидно: если сохраняет форму  $F_{n+1}(t)$ , то ее сохраняет каждый из многоугольников  $F_n(t)$  и  $F_\Delta(t)$ . Теорема доказана.

### Упражнения

17. Постройте пример семейства невыпуклых пятиугольников, для которых дискриминант трехчлена  $F(t)$  будет неположительным.

18\*. Докажите, что:

а) для любых вещественных  $p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n$

$$(p_1q_1 + p_2q_2 + \dots + p_nq_n)^2 \leq (p_1^2 + p_2^2 + \dots + p_n^2)(q_1^2 + q_2^2 + \dots + q_n^2);$$

б)  $(p_1q_1 - p_2q_2 - \dots - p_nq_n)^2 \geq (p_1^2 - p_2^2 - \dots - p_n^2)(q_1^2 - q_2^2 - \dots - q_n^2),$

если обе скобки справа неотрицательны.

В каких случаях достигаются равенства?

19. Каков ответ в задаче, сформулированной в начале статьи?

20. Докажите, что для любого выпуклого многоугольника  $P^2 > 4\pi S$ , где  $P$  — периметр,  $S$  — площадь многоугольника («изопериметрическое неравенство»).

В заключение отметим, что теорема, к которой мы пришли, имеет целый ряд интересных обобщений и следствий. Многие из них, относящиеся к пространству любой размерности (теорема Брунна, 1887 г.; неравенства Брунна — Минковского), обсуждаются в книге Г.Хадвигера «Лекции об объеме, площади поверхности и изопериметрии» («Наука», 1966 г.), где наши семейства параллельных многоугольников называются *линейными семействами* или *линейными пучками* множеств.

По-видимому, каждый из читателей поймет, что от него требуется, если его попросят сложить из трех одинаковых треугольников трапецию или из четырех уголков — уголок вдвое большего размера. Но в этой заметке пойдет речь о «сложении» совсем другого рода. Суммой двух треугольников у нас будет, как правило, выпуклый шестиугольник, суммой двух одинаковых кругов — круг вдвое большего радиуса, а суммой двух отрезков — параллелограмм. Чтобы отличить операцию, о которой мы будем рассказывать, от обычного «объединения», ее называют «векторной суммой» или «суммой Минковского» — по имени изучившего ее замечательного немецкого математика Германа Минковского (1864 — 1909). Наиболее интересные применения этого понятия относятся к выпуклым телам в трехмерном и вообще  $n$ -мерном пространстве. Но мы будем иметь дело главным образом с плоскими фигурами.

Поводом для этой заметки послужила задача М330 из «Задачника «Кванта», которую мы здесь решим. Вот ее формулировка.

*На плоскости расположены два выпуклых многоугольника  $F$  и  $G$ . Обозначим через  $H$  множество точек, в которые может попасть середина отрезка, один конец которого принадлежит  $F$ , второй —  $G$ . Докажите, что  $H$  — выпуклый многоугольник.*

*а) Сколько сторон может иметь  $H$ , если  $F$  имеет их  $n_1$ , а  $G$  —  $n_2$ ?*

*б) Каков может быть периметр  $H$ , если периметр  $F$  равен  $P_1$ , а  $G$  —  $P_2$ ?*

*в)\* Какова может быть площадь  $H$ , если площадь  $F$  равна  $S_1$ , а площадь  $G$  —  $S_2$ ?*

## Множество середин

Начнем с разбора более простой задачи.

**Задача 1.** *Даны два отрезка  $AB$  и  $CD$ . Найдите множество точек, в которые может попасть середина отрезка, один конец которого  $P$  лежит на  $AB$ , а другой конец  $Q$  — на  $CD$ .*



**Решение.** Рассмотрим сначала общий случай, когда отрезки  $AB$  и  $CD$  не параллельны. (Частный случай  $AB \parallel CD$  мы обсудим ниже.) Обозначим середину отрезка  $PQ$  через  $M$ . Зафиксируем сначала положение точки  $Q$ . Если  $P$  пробегает весь отрезок  $AB$ ,

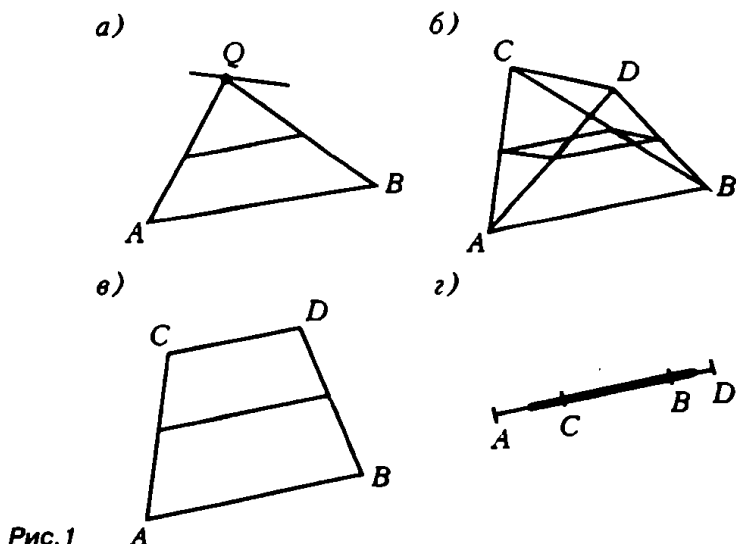


Рис. 1

то при этом  $M$  пробегает среднюю линию треугольника  $QAB$  (рис. 1, а) — отрезок с концами в серединах отрезков  $QA$  и  $QB$ . Если теперь заставить точку  $Q$  пройти весь отрезок  $CD$ , то средняя линия треугольника  $QAB$ , очевидно, заметет целый *параллелограмм* (рис. 1, б) — вершинами его будут середины отрезков  $AC$ ,  $AD$ ,  $BC$  и  $BD$ .

Заметим, что если  $AB$  и  $CD$  пересекаются, то искомое множество — параллелограмм с вершинами в серединах сторон выпуклого четырехугольника  $ACBD$ , а если  $AB$  и  $CD$  не лежат в одной плоскости, то наш параллелограмм получится в сечении тетраэдра  $ABCD$  плоскостью, параллельной  $AB$  и  $CD$  и проходящей посередине между ними.

Выясним, во что превратится этот параллелограмм, когда отрезки  $AB$  и  $CD$  параллельны. (Можно считать, что они и одинаково направлены.) Если  $AB$  и  $CD$  принадлежат различным параллельным прямым, то  $ABDC$  — трапеция, а середины  $M$  отрезков  $PQ$  заполняют среднюю линию этой трапеции (рис. 1, в) — *отрезок с концами в серединах отрезков  $AC$  и  $BD$* .

Такой же ответ получается и в том случае, когда  $AB$  и  $CD$  принадлежат одной прямой. Здесь, чтобы не разбирать различных расположений точек  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  на прямой, удобно перевести

задачу на язык алгебры. Будем считать, что наша прямая — числовая ось, координаты данных точек —  $k_A, k_B, k_C, k_D$  ( $k_A < k_B, k_C < k_D$ ), и воспользуемся таким фактом: множество чисел  $(x_P + x_Q)/2$ , где  $x_P \in [k_A, k_B], x_Q \in [k_C, k_D]$  — отрезок  $[(k_A + k_B)/2, (k_C + k_D)/2]$  (рис.1,з). Заметим, что длина полученного отрезка равна  $(AB + CD)/2$ .

Задача 1 полностью решена. В дальнейшем мы не будем столь пунктуальны в изложении решений и доказательств — многие детали оставлены читателям.

Условимся, что граничные точки всех рассматриваемых фигур (многоугольников, кругов, полуплоскостей) принадлежат этим фигурам. Следующее определение позволит нам избежать повторения слов: «отрезков», «середина», «конец».

**Определение 1.** Пусть заданы две фигуры  $F$  и  $G$  (два множества точек на плоскости или в пространстве). Назовем *полусуммой* этих фигур множество всех середин отрезков, один конец которых принадлежит  $F$ , а другой —  $G$ . Обозначим это множество так:  $F * G$ .

**Пример 1.** а) Если  $F$  и  $G$  состоят из одной точки:  $F = \{P\}, G = \{Q\}$ , то  $F * G$  — тоже одна точка (середина отрезка  $PQ$ ). Будем обозначать ее  $P * Q$ .

б) Если  $F$  — отрезок,  $G$  — одна точка ( $F = AB, G = \{Q\}$ , рис.1,а), то  $F * G$  — отрезок длиной  $AB/2$ .

в) Если  $F$  и  $G$  — параллельные отрезки  $AB$  и  $CD$ , то  $F * G$  — параллельный им отрезок длиной  $(AB + CD)/2$  («средняя линия», рис.1,в,з).

г) Если  $F$  и  $G$  — непараллельные отрезки:  $F = AB, G = CD$ , то  $F * G$  — параллелограмм с вершинами  $A * C, A * D, B * D, B * C$  (рис.1,б).

**Пример 2.** Полусумма двух прямоугольников  $F$  и  $G$  размерами  $a \times b$  и  $c \times d$ , у которых стороны  $a$  и  $c$  параллельны, — прямоугольник размерами  $(a + c)/2 \times (b + d)/2$  (рис.2).

Действительно, в системе координат  $Oxy$ , у которой ось  $Ox$  параллельна сторонам  $a$  и  $c$ , координаты  $x$  точек прямоугольников  $F$  и  $G$  пробегают отрезки длиной  $a$  и  $c$ , координаты  $y$  — отрезки длиной  $b$  и  $d$ , а полусуммы этих координат — отрезки соответственно длиной  $(a + c)/2$  и  $(b + d)/2$ . (Здесь вновь пригодился

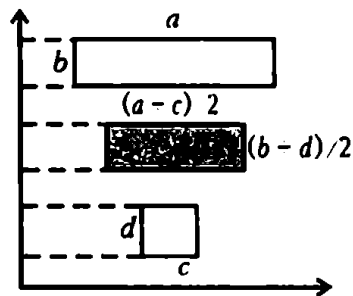


Рис. 2

тот «очевидный факт», который мы использовали в конце решения задачи 1.)

**Задача 2.** Найдите полусумму следующих двух фигур:

- а) двух непараллельно расположенных прямоугольников;
- б) правильного треугольника и его стороны;
- в) двух треугольников, на которые квадрат разрезается диагональю;
- г) квадрата и правильного треугольника, имеющих одну общую сторону;
- д) отрезка и круга;
- е) двух окружностей разных радиусов;
- ж) полуокружности с самой собой;
- з) полуокружностей, составляющих вместе окружность;
- и) одна фигура — две соседние стороны правильного пятиугольника, другая три остальные его стороны.

**Решение задачи 2, а).** Будем действовать так же, как при решении задачи 1. Зафиксируем точку  $P$  прямоугольника  $F$  (рис.3). Тогда множество точек  $P, Q$ , где  $Q$  пробегает  $G$ , — прямоугольник  $\{P\} * G$ , гомотетичный  $G$  с коэффициентом  $1/2$  (и с центром гомотетии  $P$ ). Мы должны теперь взять объединение всех прямоугольников  $\{P\} * G$ , где  $P$  пробегает  $F$ . Нетрудно видеть,

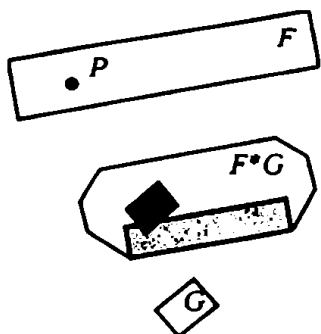


Рис. 3

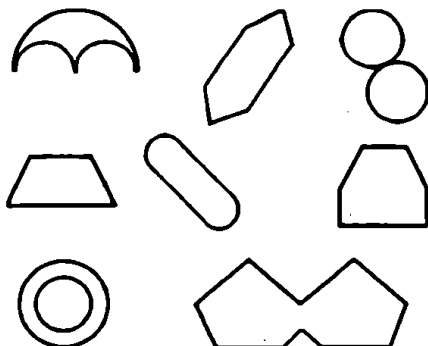


Рис. 4

что нужное объединение  $F * G$  (фигура, замечаемая заштрихованным прямоугольником на рис.3, когда его нижняя вершина пробегает серый прямоугольник, гомотетичный прямоугольнику  $F$  с коэффициентом подобия  $\frac{1}{2}$ ) — выпуклый восьмиугольник, стороны которого параллельны сторонам данных прямоугольников, а по длине равны их половинам.

Сопоставляя задачу 2, а) с предшествующим ей примером 2, мы видим, что форма фигуры  $F * G$  может существенно измениться при повороте одной из фигур  $F$  или  $G$ .

Восемь ответов к пунктам б) — и) задачи 2 в беспорядке приведены на рисунке 4.

**Задача 3.** Найдите полусумму следующих фигур в пространстве:

а) двух параллельно расположенных прямоугольных параллелепипедов;

б) отрезка и многоугольника, не лежащих в параллельных плоскостях;

в) окружности и шара;

г) двух противоположных граней правильного октаэдра (рис.5);

д) двух половинок шара, разрезанного диаметральной плоскостью.

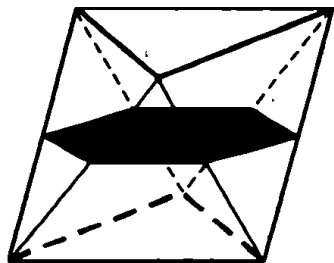


Рис. 5

### Полусумма выпуклых многоугольников

Напомним, что множество точек  $F$  называется *выпуклым*, если для любых двух точек  $P$  и  $Q$  из  $F$  весь отрезок  $PQ$  содержится в  $F$ .

Возможно, вы заметили, что находить полусумму выпуклых фигур проще, чем не выпуклых, причем

*если  $F$  и  $G$  — выпуклые фигуры, то  $F * G$  — тоже выпукло.*

Докажем это. Пусть  $M_1$  и  $M_2$  — произвольные точки из  $F * G$ . Тогда  $M_1 = P_1 * Q_1$ ,  $M_2 = P_2 * Q_2$  при некоторых  $P_1 \in F$ ,  $P_2 \in F$ ,  $Q_1 \in G$ ,  $Q_2 \in G$ . Поскольку  $F$  и  $G$  выпуклы, то  $P_1 P_2 \subset F$  и  $Q_1 Q_2 \subset G$ . Тогда  $(P_1 P_2 * Q_1 Q_2) \subset F * G$ . но, как мы знаем (пример 1), полусумма отрезков — параллелограмм, причем точки  $M_1$  и  $M_2$  — его вершины (параллелограмм может вырождаться в отрезок, содержащий точки  $M_1$  и  $M_2$ ). Раз фигура  $F * G$  содержит этот параллелограмм, она содержит и отрезок  $M_1 M_2$ :  $F * G \supset P_1 P_2 * Q_1 Q_2 \supset M_1 M_2$ .

Из примеров, встретившихся в задачах 2, а) — и), видно, что полусумма выпуклых многоугольников  $F$  и  $G$  — многоугольник, стороны которого параллельны сторонам  $F$  и  $G$ , но вдвое короче. Доказать этот факт (и даже точно его сформулировать) проще всего, представив выпуклый многоугольник как пересечение полуплоскостей.

Будем говорить, что две полуплоскости  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  имеют *одинаковое направление*, если  $\sigma_1 \supset \sigma_2$  или  $\sigma_2 \supset \sigma_1$ . Разумеется, края таких полуплоскостей  $l_1$  и  $l_2$  — параллельные прямые, а их полусумма  $\sigma_1 * \sigma_2$  — полуплоскость того же направления, края которой — прямая  $l_1 * l_2$ , расположенная посередине между  $l_1$  и  $l_2$ . (Докажите это аккуратно!)

<sup>1</sup> Мы используем обычные обозначения:  $F \cap G$  — пересечение фигур  $F$  и  $G$ ,  $F \cup G$  — их объединение,  $G \subset F$  (или  $F \supset G$ ) означает, что  $G$  содержится в  $F$ ,  $P \in F$  — что точка  $P$  принадлежит  $F$ .

Назовем полуплоскость  $\sigma_F$  *опорной* для многоугольника  $F$ , если  $\sigma_F \supset F$  и пересечение  $F$  с граничной прямой  $l_F$  полуплоскости  $\sigma_F$  непусто. Это пересечение  $l_F \cap F$  назовем *опорным* множеством. Ясно, что для каждого *направления*  $\sigma$  есть своя опорная полуплоскость. Соответствующее ей опорное множество — либо одна точка (вершина многоугольника), либо отрезок (сторона многоугольника). Опорное множество мы обозначим  $F_\sigma$ .

Пусть  $F$  и  $G$  — два выпуклых многоугольника,  $\sigma_F$  и  $\sigma_G$  — их опорные полуплоскости одного и того же направления,  $F_\sigma$  и  $G_\sigma$  — соответствующие опорные множества. Легко найти опорное множество того же направления для полусуммы  $F * G$ : оно равно полусумме опорных множеств  $F_\sigma$  и  $G_\sigma$ , т.е.

$$(F * G)_\sigma = F_\sigma * G_\sigma.$$

Действительно (рис.6), середина  $M$  любого отрезка  $PQ$ , где  $P \in F$ ,  $Q \in G$ , лежит в полуплоскости  $\sigma_{F * G} = \sigma_{F * G}$ , причем на граничную прямую полуплоскости  $\sigma_{F * G}$  точка  $M$  может попасть в том и только в том случае, если одновременно  $P \in F_\sigma$  и  $Q \in G_\sigma$ .

Теперь мы можем сформулировать удобное правило, позволяющее найти полусумму  $F * G$  выпуклых многоугольников  $F$  и  $G$ .

*Нужно рассмотреть каждое такое направление  $\sigma$ , для которого хотя бы одно из соответствующих опорных множеств  $F_\sigma$  и  $G_\sigma$  является отрезком (стороной  $F$  или  $G$ ), и построить полусумму  $F_\sigma$  и  $G_\sigma$  — отрезок  $F_\sigma * G_\sigma$  (пользуясь примерами 1,6), в)). Объединение всех этих отрезков  $F_\sigma * G_\sigma$  по разным направлениям  $\sigma$  — граница фигуры  $F * G$ .*

Применение этого правила иллюстрирует рисунок 6, где каждому из направлений  $\sigma$  соответствует свой тип линии. Ясно, что опорные множества  $F_\sigma$ ,  $G_\sigma$ , а значит, и  $(F * G)_\sigma = F_\sigma * G_\sigma$  для остальных «промежуточных» на-

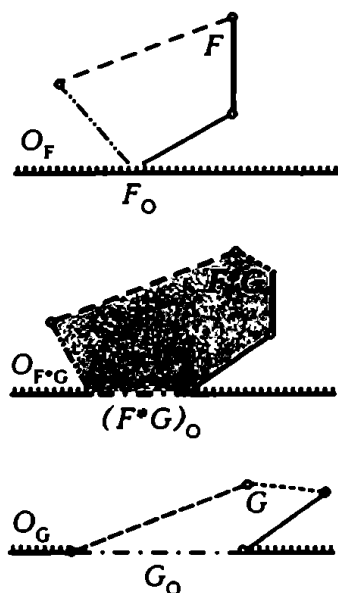


Рис. 6

правлений состоят из отдельных точек (вершин соответствующих многоугольников). Мы уже доказали, что фигура  $F * G$  выпукла. Теперь, найдя ее границу, мы видим, что  $F * G$  — выпуклый многоугольник, причем направления его сторон — те же, что у  $F$  и  $G$ .

**Задача 4.** а) Докажите, что если  $\sigma$  и  $\tau$  — полуплоскости разных направлений, то  $\sigma * \tau$  — вся плоскость.

б) Попробуйте решить задачи 2, а) — г), пользуясь правилом, сформулированным выше.

в) Приведите пример пятиугольника  $F$  и треугольника  $G$ , для которых  $F * G$  имеет 5, 6, 7 и 8 сторон.

Теперь уже легко дать ответы на вопросы а) и б) задачи М330:

а) количество сторон полусуммы  $n_1$ -угольника и  $n_2$ -угольника может быть любым числом, которое не больше  $n_1 + n_2$  и не меньше, чем наибольшее из чисел  $n_1, n_2$ ;

б) периметр  $F * G$  равен полусумме периметров  $F$  и  $G$ .<sup>2</sup>

Найти ответ на вопрос в) задачи М330 и обосновать его намного труднее. Мы узнаем его позже. А пока расскажем о том, что такое *сумма* и *линейная комбинация* фигур.

### Суммы и линейные комбинации фигур

Мы очень много раз использовали слово «полусумма» и заменяющий его значок  $*$ . Пора сказать, что такое *сумма* двух фигур.

Зафиксируем некоторую точку  $O$  (*начало отсчета* или *полюс*).

**Определение 2.** Множество всех концов  $M$  векторов

$$\vec{OM} = \vec{OP} + \vec{OQ},$$

где  $P$  и  $Q$  — произвольные точки фигур  $F$  и  $G$  соответственно, называется *суммой* (или *суммой Минковского*) фигур  $F$  и  $G$  (рис.7). Сумма  $F$  и  $G$  обозначается  $F + G$ .

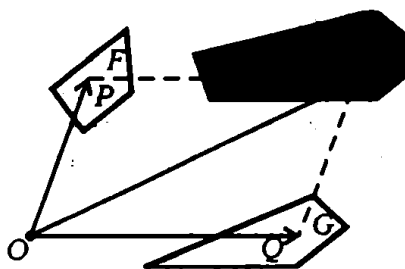


Рис. 7

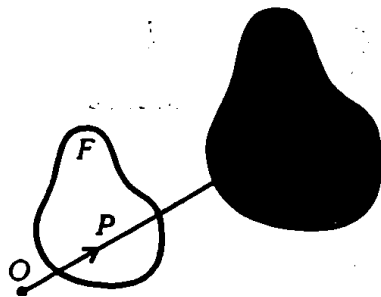


Рис. 8

**Определение 3.** Множество всех концов  $M$  векторов

$$\vec{OM} = \lambda \cdot \vec{OP},$$

<sup>2</sup> Действительно, если длину точки считать равной 0, то длина  $(F * G)_\sigma$  равна полусумме длин  $F_\sigma$  и  $G_\sigma$  для каждого направления  $\sigma$ .

где  $P$  — произвольная точка фигуры  $F$ ,  $\lambda$  — данное положительное число, называется *произведением*  $F$  на  $\lambda$  (рис.8). Эта фигура обозначается  $\lambda F$ .

**Пример 3.** «Полусумма»  $F * G$  (определение 1) есть как раз  $\frac{1}{2}(F_1 + F_2)$ ; ведь условие  $\vec{OM} = \frac{1}{2}(\vec{OP} + \vec{OQ})$  означает, что  $M$  — середина отрезка  $PQ$ .

Фигура  $\lambda F + \mu G$ , где  $\lambda$  и  $\mu$  — положительные числа, мы будем называть *линейной комбинацией* фигур  $F$  и  $G$ .

**Пример 4.** Линейная комбинация  $\lambda F + \mu G$  прямоугольников  $a \times b$  и  $c \times d$ , у которых стороны  $a$  и  $c$  параллельны (как в примере 2), — прямоугольник  $(\lambda a + \mu c) \times (\lambda b + \mu d)$ .

**Задача 5.** Как выглядят линейные комбинации  $\lambda F + \mu G$  тех фигур  $F$  и  $G$ , полусуммы которых требовалось найти в задачах 2 — 4?

**Задача 6.** Докажите следующие свойства введенных операций:

- 1)  $F_1 + F_2 = F_2 + F_1$ ;
- 2)  $(F_1 + F_2) + F_3 = F_1 + (F_2 + F_3)$ ;
- 3)  $\lambda(\mu F) = (\lambda\mu)F$ ;
- 4)  $\lambda(F_1 + F_2) = \lambda F_1 + \lambda F_2$ ;
- 5) если  $F_1 \subset F_2$ ,  $G_1 \subset G_2$ , то  $\lambda F_1 + \mu G_1 \subset \lambda F_2 + \mu G_2$ ;
- 6)  $\lambda F + \mu F \supset (\lambda + \mu)F$ ; если  $F$  выпукло, то  $\lambda F + \mu F = (\lambda + \mu)F$ ;
- 7)  $\lambda(F \cup G) = \lambda F \cup \lambda G$  и  $H + (F \cup G) = (H + F) \cup (H + G)$ ;
- 8)  $\lambda(F \cap G) = \lambda F \cap \lambda G$  и  $H + (F \cap G) \subset (H + F) \cap (H + G)$ ;
- 9) если  $F$  и  $G$  — выпуклые многоугольники на плоскости с периметрами  $P_F$  и  $P_G$ , то  $\lambda F + \mu G$  — выпуклый многоугольник периметром  $\lambda P_F + \mu P_G$ ;
- 10) если  $\lambda + \mu = 1$ , то линейная комбинация  $\lambda F + \mu G$  не зависит от того, в какой точке  $O$  помещен «полюс».

Вообще говоря, при другом выборе полюса  $O$  и при параллельном переносе данных фигур  $F$  и  $G$  линейная комбинация  $\lambda F + \mu G$  меняется, но не существенно — она просто подвергается параллельному переносу. Таким образом, если условиться две фигуры, получающиеся друг из друга параллельными переносами, не различать, считать *эквивалентными*, то можно не указывать, где выбран полюс — результат  $\lambda F + \mu G$  будет однозначно определен.

Заметим, что любая линейная комбинация  $\lambda F + \mu G$  фигур  $F$  и  $G$  получается из «нормированной» комбинации  $\frac{\lambda}{\lambda + \mu} F + \frac{\mu}{\lambda + \mu} G$  (такой, у которой сумма коэффициентов равна 1) умножением на число  $(\lambda + \mu)$ , т.е. просто гомотетией. Таким образом, линейные комбинации с  $\lambda + \mu \neq 1$  не дадут новых по форме фигур.

Опишем один способ представить себе все нормированные линейные комбинации двух выпуклых многоугольников  $F$  и  $G$ . Перенесем один из них (не поворачивая) в параллельную плоскость и построим «выпуклую оболочку»  $F$  и  $G$  — выпуклый многогранник, все вершины которого совпадают с вершинами  $F$  и  $G$  (например, правильный октаэдр на рисунке 5 — выпуклая оболочка верхнего и нижнего треугольников; его «среднее сечение» — полусумма этих треугольников). Тогда сечения этого многогранника плоскостями, параллельными  $F$  и  $G$ , дадут как раз линейные комбинации  $\lambda F + \mu G$ , где  $\lambda + \mu = 1$ ; отношение  $\lambda/\mu$  равно отношению расстояний от секущей плоскости до плоскостей  $F$  и  $G$ .

Следующие пять задач с разных сторон иллюстрируют понятие «суммы Минковского».

**Задача 7.** Из точки  $O$ , лежащей на границе полуплоскости, внутрь полуплоскости направлено  $n$  векторов длиной 1 каждый. Докажите, что если  $n$  нечетно, то длина их суммы не меньше 1.

**Задача 8.** Пусть  $F$  — выпуклый многоугольник,  $S$  — его площадь,  $P$  — периметр,  $K$  — круг радиусом 1 с центром  $O$ . Докажите, что площадь фигуры  $F + \rho K$  ( $\rho$ -окрестности многоугольника  $F$ ) равна  $S + \rho P + \rho^2 \pi$ . Напишите аналогичную формулу для объема  $\rho$ -окрестности выпуклого многоугольника.

**Задача 9.** Докажите, что следующие три свойства выпуклого многоугольника  $F$  эквивалентны: (1)  $F$  имеет центр симметрии; (2)  $F$  можно разрезать на параллелограммы; (3)  $F$  есть сумма нескольких отрезков.

**Задача 10.** Докажите, что следующие два свойства выпуклого многогранника эквивалентны: (1) все грани  $F$  — параллелограммы; (2)  $F$  есть сумма нескольких отрезков, никакие три из которых не параллельны одной плоскости. Сколько граней имеет такой многогранник, если количество отрезков —  $k$ ?

**Задача 11.** От незагащенного окурка в одной точке загорелся лес. Ветер дул в течение времени  $t_1$  со скоростью  $\vec{v}_1$ , затем  $t_2$  — со скоростью  $\vec{v}_2$ , ...,  $t_n$  — со скоростью  $\vec{v}_n$ . Пожар распространяется от загоревшихся участков со скоростью ветра (причем эти участки продолжают гореть). Какой участок выгорел за это время? А если пожар, кроме того, распространяется равномерно по всем направлениям со скоростью  $\vec{u}$ ?

### Площадь суммы фигур

Площадь фигуры  $F$  будем обозначать через  $S_F$ . Теорема о площадях гомотетичных фигур гласит:

$$S_{\lambda F} = \lambda^2 S_F. \quad (1)$$

Посмотрим, что можно сказать о площади суммы и, вообще, линейной комбинации двух фигур. Начнем с частного случая, когда  $F$  и  $G$  — прямоугольники  $a \times b$  и  $c \times d$ , причем стороны



длин  $a$  и  $c$  параллельны. Тогда  $\lambda F + \mu G$  — прямоугольник  $(\lambda a + \mu c) \times (\lambda b + \mu d)$  и

$$S_{\lambda F + \mu G} = (\lambda a + \mu c)(\lambda b + \mu d) = \lambda^2 ab + \mu^2 cd + \lambda\mu(ad + bc) \geq \\ \geq \lambda^2 ab + \mu^2 cd + 2\lambda\mu \sqrt{abcd} = (\lambda\sqrt{ab} + \mu\sqrt{cd})^2,$$

т.е.

$$S_{\lambda F + \mu G} \geq (\lambda\sqrt{S_F} + \mu\sqrt{S_G})^2 \quad (2)$$

(мы воспользовались неравенством  $p + q \geq 2\sqrt{pq}$ ). Получить какие-то еще, кроме неравенства (2), ограничения на величину  $S_{\lambda F + \mu G}$  при заданных  $S_F$  и  $S_G$  нельзя. Действительно, положив в (2)  $b = a$ ,  $c = ke$ ,  $d = e/k$  ( $k$  — какое-то положительное число), мы получим:  $S_F = a^2$ ,  $S_G = e^2$ ,

$$S_{\lambda F + \mu G} = \lambda^2 a^2 + \mu^2 e^2 + \lambda\mu ae \left(k + \frac{1}{k}\right) = \\ = (\lambda a + \mu e)^2 + \left(k + \frac{1}{k} - 2\right) \lambda\mu ae.$$

При фиксированных  $a$ ,  $e$  и  $\lambda$ ,  $\mu$  вторая скобка принимает любое неотрицательное значение (в зависимости от  $k$ ), поэтому  $S_{\lambda F + \mu G}$  может принять любое значение, не меньшее  $(\lambda\sqrt{S_F} + \mu\sqrt{S_G})^2$ .

Теперь мы можем, наконец, привести ответ на вопрос в) задачи М330: *площадь полусуммы выпуклых многоугольников площадями  $S_1$  и  $S_2$  может принимать любое значение, большее или равное  $(\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2})^2/4$ .*

Тот факт, что меньшее значение площадь полусуммы принимать не может, вытекает из следующей замечательной теоремы.

**Теорема Брунна — Минковского.** *Неравенство (2) выполняется для любых двух выпуклых фигур  $F$ ,  $G$  и любых положительных чисел  $\lambda$ ,  $\mu$ .*

**Доказательство.** Прежде всего, используя соображения подобия и формулу (1), легко свести дело к случаю, когда площади данных фигур равны, а линейная комбинация — нормированная. Для этого случая неравенство (2) выглядит очень просто:

$$\text{если } S_F = S_G = S \text{ и } \lambda + \mu = 1, \text{ то } S_{\lambda F + \mu G} \geq S. \quad (3)$$

Покажем, как из (3) выводится неравенство (2) для любых  $F$ ,  $G$ ,  $\lambda$  и  $\mu$ . Рассмотрим вместе с  $F$  и  $G$  гомотетичные им фигуры площади  $S$ :

$$F^* = \sqrt{S/S_F} F, \quad G^* = \sqrt{S/S_G} G.$$

Тогда

$$\lambda F + \mu G = \lambda \sqrt{S_F/SF^*} + \mu \sqrt{S_G/SG^*} = (\lambda \sqrt{S_F/S} + \mu \sqrt{S_G/S})(\lambda^* F^* + \mu^* G^*),$$

где  $\lambda^* + \mu^* = 1$ . Применяя (3) к  $\lambda^* F^* + \mu^* G^*$  и пользуясь еще раз (1), получим (2):

$$\sqrt{S_{\lambda F + \mu G}} \geq (\lambda \sqrt{S_F/S} + \mu \sqrt{S_G/S}) \sqrt{S} = \lambda \sqrt{S_F} + \mu \sqrt{S_G}.$$

Вот основное соображение, используемое при доказательстве неравенства (3). Если фигура  $F$  разбита горизонтальной прямой  $l$  на две части: верхнюю  $F_v$  и нижнюю  $F_n$ , и аналогично,  $G$  другой горизонтальной прямой  $m$  разделена на две части  $G_v$  и  $G_n$ , то множество  $\lambda F_v + \mu G_v$  и  $\lambda F_n + \mu G_n$  не налегают друг на друга: первое лежит выше прямой  $\lambda l + \mu m$ , второе — ниже.

Теперь доказательство в двух словах можно закончить так.

Разобьем многоугольники  $F$  и  $G$  на  $N$  узких горизонтальных полосок и занумеруем их по порядку сверху вниз:  $F_1 \cup F_2 \cup \dots \cup F_N = F$ ,  $G_1 \cup G_2 \cup \dots \cup G_N = G$ . Каждую полоску можно считать прямоугольником площадью  $S/N$  (если  $N$  велико, это «с точностью до сколь угодно малого  $\epsilon$ » не влияет на площади фигур  $F$ ,  $G$  и  $\lambda F + \mu G$ ). Но для прямоугольников с параллельными сторонами основное неравенство (2) уже доказано, поэтому площадь каждой из полосок  $\lambda F_i + \mu G_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$  (мы складываем лишь полоски с одинаковыми номерами!), не меньше  $S/N$ . А поскольку эти  $N$  полосок не налегают друг на друга и, разумеется, содержатся в  $\lambda F + \mu G$ , то площадь  $S_{\lambda F + \mu G}$  не меньше  $S$ .

Итак, неравенство Брунна — Минковского доказано. Приведем здесь только одно его следствие. Это — знаменитая изопериметрическая теорема: *площадь любой фигуры с периметром  $P$  не больше, чем площадь круга с длиной окружности  $P$* . Докажем ее для выпуклого многоугольника  $F$ . Используя обозначения и результат задачи 8, применим к сумме  $F + K$  ( $K$  — круг единичного радиуса) неравенство Брунна. Получим:

$$\sqrt{S + P + \pi} \geq \sqrt{S} + \sqrt{\pi},$$

или, после упрощений,  $S \leq P^2/4\pi$ . Это и есть нужное неравенство!

**Задача 12.** а) Докажите, что для площадей линейной комбинации двух выпуклых многоугольников верна формула  $S_{\lambda F + \mu G} = S_F \lambda^2 + 2S_{F,G} \lambda \mu + S_G \mu^2$ , где число  $S_{F,G}$  зависит только от  $F$  и  $G$  (это число называется

смешанной площадью фигур  $F$  и  $G$ ). Найдите  $S_{F,G}$  для фигур  $F, G$  из задач 2, а) — д).

б) Докажите, что всегда  $S_{F,G}^2 \geq S_F S_G$ , причем равенство имеет место, только если многоугольники  $F$  и  $G$  гомотетичны.

**Задача 13.** Докажите, что неравенство (2) верно для произвольных фигур (не обязательно выпуклых). Подумайте, как сформулировать и доказать аналогичную теорему для объемов пространственных фигур.

В заключение нашего беглого знакомства с суммой Минковского перечислим некоторые книги и статьи, в которых рассказано о сложении фигур, применении этой операции к теории выпуклых множеств, в частности, о различных доказательствах неравенства Брунна — Минковского, его обобщениях и геометрических следствиях.

*И.М.Яглом, В.Г.Болтянский.* «Выпуклые фигуры» (книга из серии «Библиотека математического кружка», вып.4). Гостехтеориздат, 1951 г.

*Л.А.Люстерник.* «Выпуклые фигуры и многоугольники». Гостехтеориздат, 1956 г.

*Б.Н.Делоне.* Доказательство неравенства Брунна — Минковского. «Успехи математических наук», вып. II (1936 г.).

*Н.Б.Васильев.* Семейство параллельных  $n$ -угольников. См. настоящий сборник; решение задачи М295, «Квант» №6, 1975 г.

*Г.Хадвигер.* Лекции об объеме, площади поверхности и изопериметрии. М., «Наука», 1966 г.

## Ошибки в геометрических доказательствах

Если ваше возражение состоит в том, что биссектриса и срединный перпендикуляр пересекаются вне треугольника  $ABC$ , но точки  $P$  и  $Q$  лежат на его сторонах (рис.1), то вы не правы. Как и раньше,  $AN = NC$  и  $NP = NQ$ . Поэтому треугольники  $ANP$  и  $CNQ$  равны и  $\angle NAP = \angle NCQ$ . Кроме того,  $\triangle ANC$  равнобедренный, поэтому  $\angle NAM = \angle NCM$ . Вычитая из равных углов равные, мы получаем, что  $\angle BAC = \angle BCA$ , т.е.  $\triangle ABC$  — равнобедренный.

На самом же деле в общем случае срединный перпендикуляр и биссектриса пересекаются в точке  $N$  вне треугольника, а перпендикуляры из точки  $N$  на стороны  $BA$  и  $BC$

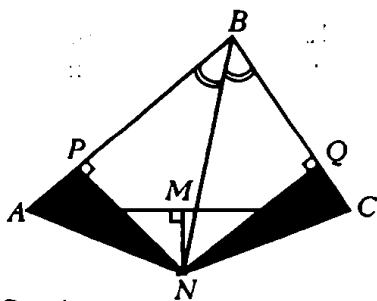


Рис. 1

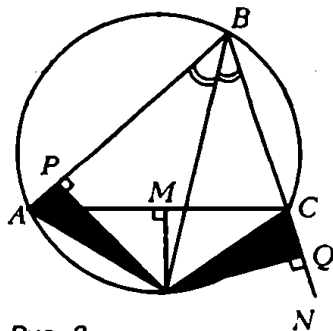


Рис. 2

обязательно располагаются так, что один из них попадает на саму сторону, а другой — на продолжение другой стороны (рис.2). В этом случае  $\triangle APN$  по-прежнему равен  $\triangle CNQ$  и  $\angle NAP = \angle NCQ$ . Кроме того,  $\angle NAM = \angle NCM$ . Однако в этом случае  $\angle BAC = \angle NAP - \angle NAM$ , а  $\angle BCA = 180^\circ - (\angle NCQ + \angle NCM)$ . Отсюда, конечно, не следует равенство углов  $BAC$  и  $BCA$ .

Однако такое объяснение не должно вас удовлетворить. Ведь нужно доказать, что расположение частей в треугольнике такое, как на рисунке 2 (или «обратное»:  $Q \in BC$ ,  $P \in AB$ ). Приведем это доказательство.

Опишем вокруг треугольника  $ABC$  окружность и предположим, что  $AB > BC$ . По свойству вписанных углов биссектриса угла  $B$  пересекает

дугу  $AC$  в ее середине. Через ту же середину проходит и срединный перпендикуляр к отрезку  $AC$ . Следовательно, точка  $N$  — середина дуги  $AC$ . Поскольку  $AB > BC$ , то  $\cup AB > \cup BC$ . Прибавляя к обеим частям этого неравенства равные дуги  $\cup AN$  и  $\cup NC$ , мы получим неравенство  $\cup BAN > \cup BCN$ . Следовательно, дуга  $\cup BAN$  больше полуокружности, а дуга  $\cup BCN$  — меньше. Следовательно,  $\angle NCB$  тупой, а  $\angle NAB$  — острый. Поэтому точка  $Q$  лежит на продолжении стороны  $BC$ , а точка  $P$  — на стороне  $AB$ .

1. Мы безо всяких оснований предположили, что сумма углов треугольника является постоянной величиной и не зависит от самого треугольника. В действительности, в геометрии Лобачевского, в которой не выполнена аксиома параллельности, сумма углов любого треугольника

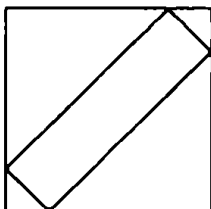


Рис. 3

меньше, чем  $180^\circ$ , и разность между  $180^\circ$  и суммой углов треугольника пропорциональна его площади. Тем самым, чем ближе сумма углов треугольника к  $180^\circ$ , тем меньше его площадь.

2. Проведите наше «доказательство» на чертеже, данном в рисунке 3.

3. Мы правильно доказали, что отрезки  $A_i A_{i+1}$  и  $B_i B_{i+1}$  не пересекаются. Однако при  $i \neq j$  отрезки  $A_i A_{i+1}$  и  $B_j B_{j+1}$  могут пересечься.

4. Если большая окружность катится без проскальзывания, то меньшая окружность обязательно будет проскальзывать. Поэтому отрезок не будет равен длине меньшей окружности.

5. Последовательность волнообразных линий действительно неограниченно приближается к отрезку. Однако из этого не следует, что последовательность их длин стремится к длине отрезка  $AB$ .

6. Мы молчаливо предполагали, что маленький сферический треугольник развернут на плоскость, и применили формулу для вычисления площади плоского треугольника. В действительности, никакой сферический треугольник не может быть развернут на плоскость. В нашем случае это следует из того, что у сферического треугольника — два прямых угла, а у плоского треугольника этого быть не может.

### Окружность девяти точек и прямая Эйлера

1. Девять точек, определяющие окружность, для всех треугольников одни и те же.

2. Воспользуйтесь свойством (6).

3. Воспользуйтесь свойством (7).

4. Докажите, что если  $M$  — точка на описанной окружности и  $H$  — ортоцентр треугольника, то прямая Симсона, соответствующая точке  $M$ , делит отрезок  $HM$  пополам — так же, как и окружность девяти точек. Далее докажите, что угол между прямыми Симсона, соответствующими точками  $M_1$  и  $M_2$  измеряется половиной дуги  $M_1 M_2$ .

5. а) Если  $O_1, O_2, O_3$  — центры окружностей, описанных около треугольников  $AMB, BMC$  и  $CMA$ , то  $O_1O_2CA, O_2O_3AB, O_3O_1BC$  — параллелограммы, а ортоцентрами треугольников  $AMB, BMC$  и  $CMA$  являются, соответственно,  $C, A$  и  $B$ . Значит, прямые Эйлера  $O_1C, O_2A$  и  $O_3B$  пересекаются в точке, являющейся серединой отрезков  $O_1C, O_2A, O_3B$ .

б) Пусть  $O_1, O_2, O_3$  — центры окружностей, описанных около треугольников  $ABM, BMC$  и  $CMA$ ,  $O'_1, O'_2, O'_3$  — точки, им симметричные относительно, соответственно, прямых  $AB, BC, CA$ . Докажите, что треугольник  $O'_1O'_2O'_3$  — правильный, точки  $M, O'_1, O'_2, O'_3$  лежат на одной окружности, прямые Эйлера треугольников  $AMB, BMC$  и  $CMA$  проходят через  $O_1, O_2, O_3$  и середины отрезков  $MO'_1, MO'_2, MO'_3$  соответственно и перпендикулярны этим отрезкам. Следовательно, прямые Эйлера пересекаются в центре окружности, описанной около треугольника  $O'_1O'_2O'_3$ .

6. Пусть  $BC = a, CA = b, AB = c$ . Множество точек  $M$ , для которых

$$MA^2(b^2 - c^2) + MB^2(c^2 - a^2) + MC^2(a^2 - b^2) = 0,$$

есть прямая, поскольку центр описанной окружности и точка пересечения медиан удовлетворяют этому уравнению (для точки пересечения медиан воспользуйтесь формулой, выражающей их длины через стороны треугольника), эта прямая есть прямая Эйлера. Легко проверить, что точка  $L$  также удовлетворяет этому уравнению.

### Вокруг биссектрисы

20. Пусть  $H$  — точка пересечения высот, тогда  $MN$  проходит через середину  $BH$  — точку  $K, BK = B_1O$  ( $B_1$  — середина  $AC$ ). Далее, докажите, что прямая  $MN$  параллельна  $OB$  (если  $\angle C > \angle A$ , то  $\angle MKH = 2\angle MBH = \angle C - \angle A = \angle OBH$ ).

21. Докажите, что площадь треугольника с вершинами в точках касания вневписанной окружности с центром  $I_a$  можно вычислить по формуле

$$Q_a = S_{ABC} \cdot \frac{r_a}{2R} = \frac{S_{ABC}^2}{2R} \cdot \frac{1}{p-a}.$$

Аналогичные формулы могут быть получены для площадей других треугольников.

22. Пусть  $K_1$  и  $L_1$  — такие точки на  $BC$  и  $BA$ , что  $K_1K \parallel L_1L \parallel BB'$ . Достаточно доказать, что треугольники  $BK_1K$  и  $BL_1L$  подобны, т.е. что  $BK_1 : K_1K = BL_1 : L_1L$ . Имеем

$$\frac{BK_1}{BA'} = \frac{B'K}{B'A'}, \quad \frac{K_1K}{BB'} = \frac{A'K}{B'A'},$$

и по теореме 1

$$\frac{BK_1}{K_1K} = \frac{B'K}{A'K} \cdot \frac{BA'}{BB'} = \frac{CB'}{CA'} \cdot \frac{BA'}{BB'} = \frac{c}{b} \cdot \frac{CB'}{BB'} = \frac{ca}{(a+c)BB'}.$$

Последнее выражение симметрично относительно  $a$  и  $c$ , а значит, равно также  $BL_1 : L_1L$ .

23. Докажем, что оба утверждения эквивалентны равенству  $AB \cdot CD = AD \cdot BC$ . Возьмем на дуге  $BAD$  точку  $A_1$  так, что  $DA_1 = AB$ . Условие задачи эквивалентно тому, что прямая  $A_1C$  проходит через  $N$  — середину  $BD$ , т.е. равенству площадей треугольников  $DA_1C$  и  $A_1BC$ , откуда  $DA_1 \cdot DC = BA_1 \cdot BC$  или  $AB \cdot CD = AD \cdot BC$ .

24. Пусть  $B_1$  — середина  $AC$ . Продолжим биссектрису до пересечения в точке  $B_2$  с перпендикуляром, восстановленным к  $AC$  в точке  $B_1$ . Точка  $B_2$  лежит на описанной около  $ABC$  окружности. Проведем через  $M$  перпендикуляр к  $AC$ , пусть  $L$  — точка его пересечения с  $AC$ ,  $K$  — с  $BB_1$ , тогда  $KM = ML$ . Проведем через  $K$  прямую, параллельную  $AC$ , пересекающую  $AB$  и  $BC$  в точках  $D$  и  $E$ . Если  $G$  и  $F$  — проекции  $D$  и  $E$  на  $AC$ , то  $M$  — центр прямоугольника  $GDEF$ , причем  $\triangle DME \sim \triangle AB_2C$  ( $\triangle DME$  получается из  $\triangle AB_2C$  при гомотетии с центром в  $B$ ). Имеем

$$\operatorname{ctg} \angle MCL = \frac{LC}{ML} = \frac{LF}{ML} + \frac{FC}{ML} = \frac{AB_1}{B_1B_2} + 2 \frac{FC}{EF} = \operatorname{ctg} \frac{\angle B}{2} + 2 \operatorname{ctg} \angle C.$$

Если теперь  $B'$  — основание биссектрисы,  $P$  и  $T$  — проекции  $N$  и  $B'$  на  $BC$ , то

$$\operatorname{ctg} \angle NCB = \frac{PC}{NP} = \frac{PT}{NP} + \frac{TC}{NP} = \frac{BP}{NP} + 2 \frac{TC}{B'T} = \operatorname{ctg} \frac{\angle B}{2} + 2 \operatorname{ctg} \angle C,$$

т.е.  $\angle MCA = \angle NCB$ .

25. Произведение длин отрезков от вершины  $A$  треугольника до точек пересечения стороны  $AB$  с данной окружностью будет равно такому же произведению для стороны  $AC$ . Эти длины легко выразить через длины рассматриваемых хорд и длины сторон треугольника. Аналогичные равенства можно записать для вершин  $B$  и  $C$ . Таким образом мы получим систему уравнений, позволяющую выразить длины хорд через длины сторон и проверить утверждение задачи прямым вычислением. Чтобы избежать перебора вариантов, удобно выбрать какое-то направление обхода треугольника и считать отрезки направленными, а их длины — произвольными действительными числами.

26. Пусть  $\angle KAL = \angle KLA = \varphi$ ,  $\angle KCL = \angle LKC = \psi$ . Тогда  $\angle BKL = 2\varphi$ ,  $\angle BLK = 2\psi$ ,  $2\varphi + 2\psi = 180^\circ - \angle B$ . Если  $Q$  — точка пересечения  $AL$  и  $KC$ , то  $\angle AQC = 180^\circ (\varphi + \psi) = 90^\circ + \frac{\angle B}{2}$ . Проведем через  $M$  прямую, параллельную  $BC$ , до пересечения с  $KC$  в точке  $N$ , тогда  $MQ$  — биссектриса треугольника  $AMN$  и  $\angle AQN = 90^\circ + \frac{\angle B}{2}$ . Отсюда следует, что  $Q$  — точка пересечения биссектрис треугольника  $AMN$ , значит,  $\triangle AMN \sim \triangle KBL$ . Пусть  $AK = KL = LC = x$ ,  $AM = y$ ,  $MN = z$ . Из того, что  $\triangle AMN \sim \triangle KBL$  и  $\triangle KMN \sim \triangle KBC$ , получим

$$\frac{z}{a-x} = \frac{y}{c-x}, \quad \frac{y-x}{c-x} = \frac{z}{a},$$

откуда  $y = a$ .

27. Перпендикулярность биссектрис доказывается без труда. Докажем второе утверждение. Пусть  $M$  — середина  $AC$ ,  $N$  — середина  $BD$ . Из подобия треугольников  $AMK$  и  $BKD$  следует, что  $\angle MKA = \angle NKD$  и  $\frac{MK}{KN} = \frac{AC}{BD}$ , т.е. биссектриса угла  $BKC$  является также биссектрисой угла  $MKN$  и делит отрезок  $MN$  в отношении  $\frac{MK}{KN} = \frac{AC}{BD}$ . Очевидно, что в этом же отношении делит  $MN$  и биссектриса угла  $ALB$ .

### Построения одним циркулем

1. Окружность  $S_1$  (за вычетом точки  $O$ ) есть геометрическое место точек, симметричных относительно окружности  $S$  точкам прямой  $AB$ ; окружность  $S_2$  — геометрическое место точек, симметричных относительно окружности  $S$  точкам прямой  $CD$ . Поэтому точка  $P$  симметрична относительно окружности  $S$  как точке прямой  $AB$ , так и точке прямой  $CD$ , т.е.  $P'$  — общая точка прямых  $AB$  и  $CD$ . Заметим, что прямые  $AB$  и  $CD$  параллельны тогда и только тогда, когда окружности  $S_1$  и  $S_2$  имеют единственную общую точку  $O$ , т.е. касаются в точке  $O$ , и прямые  $AB$  и  $CD$  совпадают тогда и только тогда, когда совпадают окружности  $S_1$  и  $S_2$ .

2. См. решение задач 6 и 4.

3. Сторону, равную радиусу окружности, имеет вписанный в нее правильный шестиугольник. Поэтому  $A$  и  $C$  — противоположные вершины вписанного правильного шестиугольника, т.е. диаметрально противоположные точки окружности. Значит,  $AC$  — диаметр, т.е. точка  $C$  лежит на луче  $AB$ , и  $AC = 2AB$ .

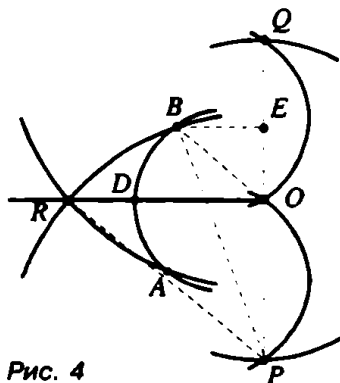


Рис. 4

4. Обозначим через  $D$  середину дуги  $AB$  и через  $E$  середину отрезка  $OQ$  (рис.4). Мы должны доказать, что  $PD = OR$ . Заметим, что  $RO \perp PQ$ ,  $BE \perp OQ$ , точка  $D$  лежит на  $RO$ , точка  $O$  лежит на  $PQ$  и  $OB = OD$ ,  $PR = PB$ , и воспользуемся теоремой Пифагора:

$$\begin{aligned} OR^2 &= PR^2 - PO^2 = PB^2 - PO^2 = (PE^2 + BE^2) - PO^2 = \\ &= PE^2 + OB^2 - OE^2 - PO^2 = \frac{9}{4} PO^2 + OB^2 - \frac{1}{4} PO^2 - PO^2 = \\ &= PO^2 + OB^2 = PO^2 + OD^2 = PD^2. \end{aligned}$$

5. Очевидно, точка  $P'$  лежит на прямой  $OP$  (вся картина симметрична относительно прямой  $OP$ ). Треугольники  $ORP'$  и  $OPR$  — равнобедренные и имеют общий угол при основании; значит, они подобны и  $OP' : OR = OR : OP$ , т.е.  $OP \cdot OP' = OR^2$ .

6. Будем строить точку, симметричную точке  $P'$  относительно



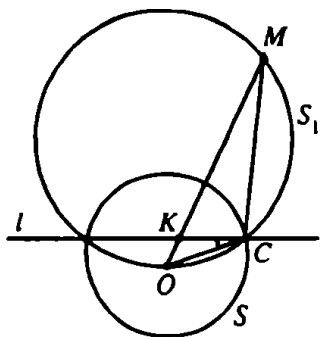


Рис. 5

окружности  $S$ , по способу задачи 5. Должна получиться точка  $P$ . Значит, точки  $O$  и  $P$  симметричны относительно прямой, проходящей через точки пересечения окружности  $S$  с окружностью с центром  $P'$ , проходящей через  $O$ . Но точки  $O$  и  $P$  симметричны относительно прямой  $AB$ . Значит, эти прямые совпадают.

Покажем, что окружность  $S_1$ , проходящая через точку  $O$  и точки пересечения окружности  $S$  с некоторой прямой  $l$  (рис. 5), состоит из точек, симметричных точкам прямой  $l$  относительно окружности  $S$ . Возьмем на прямой  $l$  точку  $K$  и обозначим через  $M$  точку пересечения луча  $OK$  с окружностью  $S_1$ . Пусть  $C$  — одна из точек пересечения окружности  $S$  с прямой  $l$  (и окружностью  $S_1$ ). Треугольники  $OKC$  и  $OCM$  подобны (углы  $O$  у них одинаковы, углы  $OMC$  и  $OCK$  равны, поскольку они опираются на равные дуги окружности  $S_1$ ). Значит,  $OK : OC = OC : OM$ , т.е.  $OK \cdot OM = OC^2$ . (Если точка  $K$  лежит вне окружности  $S$ , чертеж меняется, но рассуждение остается точно таким же.)

Приложение к журналу «Квант» № 1/98

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ КРУЖОК

ГЕОМЕТРИЯ

ВЫПУСК 1

Редактор *А.Ю.Котова*

Литературный редактор *Л.В.Кардасевич*

Технический редактор *Е.В.Морозова*

Компьютерная группа

*Е.А.Митченко, Л.В.Осипова*

ИБ № 29

Формат 84×108 1/32. Бум. офс. нейтр. Гарнитура кудряшевская.

Печать офсетная. Усл. печ. л. 6,72.

Заказ 2548.

117296 Москва, Ленинский пр., 64А

«Квант»

Отпечатано на Ордена Трудового Красного Знамени

Чеховском полиграфическом комбинате

Комитета Российской Федерации по печати

142300 г.Чехов Московской области

Тел. (272) 71-336, факс (272) 62-536